

MNSGA-DO Aplicado a Problemas de Otimização Multiobjetivo com Complexos Espaços de Decisão e Objetivo

1st Jussara Gomes Machado
 Pós-Graduação em Ciência da Computação
 State University of Feira de Santana
 Feira de Santana, BA, Brazil
 jussaraUEFS@gmail.com

2nd Matheus Giovanni Pires
 Exact Sciences Department
 State University of Feira de Santana
 Feira de Santana, BA, Brazil
 mgpires@uefs.br

3rd Fabiana Cristina Bertoni
 Exact Sciences Department
 State University of Feira de Santana
 Feira de Santana, BA, Brazil
 fcbertoni@uefs.br

Resumo—Este artigo apresenta um estudo de duas recentes variantes do algoritmo NSGA-II, chamadas NSGA-DO e MNSGA-DO, aplicadas na resolução de problemas de otimização multiobjetivo com diferentes dificuldades no espaço de decisão e diferentes formas da fronteira de Pareto. Estas variantes propõem distintos operadores de seleção para a escolha de indivíduos que farão parte da nova população em cada geração, os quais são baseados na distância entre as soluções e pontos ideais que são calculados na Fronteira Pareto-Ótima dos problemas. Para avaliar a convergência e a diversidade desses algoritmos multiobjetivo, foi utilizado o conjunto de testes de referência WFG, e os resultados foram comparados considerando os indicadores de qualidade GD, IGD, *Spread* e HV. Tais resultados demonstram a superioridade do MNSGA-DO em relação aos demais algoritmos.

Index Terms—Algoritmo Genético Multiobjetivo; Otimização Multiobjetivo; NSGA-II; NSGA-DO.

I. INTRODUÇÃO

Um problema de otimização multiobjetivo é um problema com dois ou mais objetivos, geralmente conflitantes entre si, que precisam ser otimizados simultaneamente. A solução de um problema multiobjetivo é formada por um conjunto de soluções que apresentam um compromisso entre os objetivos, denominado conjunto Pareto. Para indicar a qualidade de uma solução e auxiliar no processo de seleção, o conceito de dominância de Pareto é comumente utilizado. Este conceito define soluções consideradas superiores a outras, conhecidas como não-dominadas; enquanto que as soluções que podem ser superadas por outras são chamadas de dominadas. Uma solução Pareto-ótima é uma solução tal que nenhuma outra solução do conjunto Pareto a domina. O conjunto de todas as soluções Pareto-ótimas constitui o conjunto Pareto-ótimo. Desta forma, o objetivo fundamental da otimização multiobjetivo consiste em determinar o conjunto Pareto-ótimo (PS^*), bem como a imagem desse conjunto pela função objetivo, que

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, e com apoio do Programa Interno de Auxílio Financeiro aos Programas de Pós-Graduação Stricto Sensu (AUXPPG) da UEFS e apoio à Pós-Graduação (PROAP) da CAPES.

é a Fronteira Pareto-Ótima (PF^*), ou simplesmente, Fronteira de Pareto.

Algoritmos Genéticos Multiobjetivos (AGMO) têm sido aplicados a várias classes de Problemas de Otimização Multiobjetivo (POM) e têm se mostrado promissores para resolver tais problemas eficientemente, [1]–[7]. Devido à natureza dos AGMO, seus comportamentos e desempenhos são frequentemente estudados de maneira experimental. Para isso, alguns *benchmarks* vêm sendo propostos, com o objetivo de avaliar sua convergência e sua capacidade de preservação da diversidade. Dentre esses *benchmarks* estão o ZDT (*Zitzler-Deb-Thiele*) [8], o DTLZ (*Deb-Thiele-Laumanns-Zitzler*) [9], o WFG (*Walking Fish Group*) [10] e o LZ09 (*Li-Zhang*) [11].

O trabalho desenvolvido por Jussara et al. [12] apresenta um novo AGMO, denominado MNSGA-DO (do inglês, *Modified Non-dominated Sorting Genetic Algorithm Distance-Oriented*), que visa ajustar o operador de seleção do NSGA-DO (do inglês, *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm Distance-Oriented*), desenvolvido por Pimenta e Camargo [13], para melhorar sua diversidade quando aplicado a problemas de otimização multiobjetivo contínuos. Para validar a proposta, foi realizada uma comparação de desempenho entre este novo AGMO e os algoritmos genéticos NSGA-II (do inglês, *Nondominated Sorting Genetic Algorithm-II*) e NSGA-DO, aplicando o conjunto de problemas ZDT [8], considerado simples em função das características de seu PS [11]. Os resultados demonstraram que o MNSGA-DO superou os algoritmos NSGA-II e NSGA-DO em quase todos os testes.

No entanto, como as características de PS e a forma de PF afetam diretamente o desempenho dos algoritmos genéticos multiobjetivo [14], este trabalho objetiva avaliar o algoritmo MNSGA-DO para POM de maior complexidade, utilizando para isso os problemas que compõem o *benchmark* WFG.

O restante do artigo está organizado da seguinte forma: a seção II apresenta os conceitos relacionados a problemas de otimização multiobjetivo. Na seção III descreve-se o funcionamento dos AGMO NSGA-II, NSGA-DO e MNSGA-DO. A seção IV traz os experimentos que foram realizados, considerando o conjunto de problemas de teste WFG. Por fim,

a seção V apresenta as conclusões deste trabalho.

II. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

De acordo com Li et al. [15], um Problema de Otimização Multiobjetivo (POM) pode ser definido pela Equação 1.

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T \\ & \text{sujeito a } g_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, J \\ & \quad h_k(x) = 0, k = 1, \dots, K \\ & \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

onde g_j representa as J restrições de desigualdade e h_k representa as K restrições de igualdade. $\Omega = \Gamma_{i=1}^n [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^n$ é o domínio das variáveis, sendo a_i o limite inferior e b_i o limite superior, e $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \Omega$ é uma solução candidata. $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ constitui as m funções objetivo conflitantes e \mathbb{R}^m é chamado espaço objetivo. O conjunto de objetivos factíveis é definido como $\Theta = \{F(x) \mid x \in \Omega, g_j(x) \geq 0, h_k(x) = 0\}$, para $j \in \{1, \dots, J\}$ e $k \in \{1, \dots, K\}$.

Definição 1. Dominância de Pareto: Uma solução x_1 domina uma solução x_2 (denotado por $x_1 \prec x_2$), se e somente se, $f_i(x_1) \leq f_i(x_2) \forall i \in \{1, \dots, m\}$ e $\exists j \in \{1, \dots, m\} \mid f_j(x_1) < f_j(x_2)$. De acordo com a Equação 1, x^* é uma solução Pareto-ótimo se não existe outra solução $x \in \Omega$ tal que $x \prec x^*$. Consequentemente, $F(x^*)$ é um vetor Pareto-ótimo. Essa relação de dominância não é reflexiva, de modo que uma solução não pode dominar a si mesma, e não é simétrica, ou seja $x_1 \prec x_2$ mas o contrário ($x_2 \prec x_1$) não pode ser verdadeiro. A dominância de Pareto também é transitiva, isto é, se $x_1 \prec x_2$ e $x_2 \prec x_3$ então $x_1 \prec x_3$.

Definição 2. Conjunto Pareto-Ótimo (PS*): As soluções não dominadas entre si formam um conjunto denominado Pareto-Ótimo, composto pelas melhores soluções do problema.

Definição 3. Fronteira Pareto-Ótima (PF*): Quando vistos no espaço objetivo, o Conjunto Pareto-Ótimo forma a Fronteira Pareto-Ótima. Nesta fronteira encontram-se as melhores soluções para o problema.

III. OTIMIZAÇÃO GENÉTICA MULTIOBJETIVO

Em uma tentativa assertiva de melhorar o desempenho do NSGA, Srinivas e Deb [16] e Deb et al. [17] desenvolveram o NSGA-II, um algoritmo genético que, além de enfatizar soluções dominantes, utiliza o princípio elitista e implementa um algoritmo específico capaz de preservar a diversidade em sua população. O NSGA-II tem sido amplamente utilizado na resolução de diversos tipos de problemas [18]–[21], e é comumente utilizado como algoritmo base no desenvolvimento de outros algoritmos [22]–[24].

De forma geral, o NSGA-II funciona da seguinte forma: para cada solução i contida na população, dois valores são calculados: nd_i , que é o número de soluções que dominam a solução i , e U_i , que é o conjunto de soluções que são dominadas pela solução i . Soluções com $nd_i = 0$ estarão contidas na fronteira F_1 (Fronteira Pareto-Ótima). Desta forma, para cada solução j pertencente ao conjunto U_i , o valor de nd_j é decrementado para cada solução i que domina j , onde $i \in F_1$.

Se o valor de $nd_j = 0$, então a solução j pertencerá à próxima fronteira, no caso, F_2 . Este processo se repete até que todas as soluções sejam classificadas em uma fronteira (F_1, F_2, \dots, F_f), de acordo com o grau de dominância de cada solução.

A escolha das soluções que farão parte da próxima geração também se dá pelo grau de dominância, ou seja, as primeiras soluções selecionadas são da fronteira F_1 , em seguida da fronteira F_2 , e assim por diante. No entanto, é possível que a quantidade de soluções de uma fronteira ultrapasse o tamanho da população do algoritmo. Neste caso, o NSGA-II aplica um operador de seleção chamado distância de multidão (do inglês, *Crowding Distance*), para decidir quais soluções da fronteira atual serão selecionadas para a próxima geração. Buscando a diversidade das soluções, este operador escolhe as soluções mais distantes dos aglomerados de soluções na fronteira, calculando a média da distância das duas soluções adjacentes a cada indivíduo para todos os objetivos.

Conforme já mencionado, existem na literatura propostas de novos algoritmos baseados no NSGA-II, sendo um deles o NSGA-DO, desenvolvido por Pimenta e Camargo [13]. Como o NSGA-DO é baseado no NSGA-II, ele também utiliza o critério de dominância entre as soluções e a estratégia de Elitismo para preservar as melhores soluções encontradas até o momento. A diferença entre o NSGA-II e o NSGA-DO está exatamente na forma de selecionar as soluções de uma determinada fronteira para a próxima geração. Nesta situação, o NSGA-DO define pontos ideais na fronteira Pareto-Ótima (F_1). Para encontrar estes pontos ideais, o NSGA-DO calcula o tamanho de F_1 e estima uma partição uniforme, definindo a posição dos pontos ideais. Portanto, as soluções que serão inseridas na próxima geração são aquelas mais próximas dos pontos ideais.

Para um melhor entendimento da diferença entre o NSGA-II e o NSGA-DO, considere as fronteiras F_1 e F_2 ilustradas na Figura 1.

As soluções pertencentes à fronteira F_1 dominam as soluções da fronteira F_2 e não são dominadas por nenhuma outra solução, logo, F_1 é a Fronteira Pareto-Ótima. Os pontos pretos (I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5) representam os pontos ideais. Os pontos cinzas ($F_1S_1, F_1S_2, F_1S_3, F_1S_4, F_1S_5, F_2S_1, F_2S_2, F_2S_3$ e F_2S_4) representam as soluções encontradas por um algoritmo genético. f_1 e f_2 são as funções objetivo a serem otimizadas. Assumindo que oito soluções devem ser selecionadas para a próxima geração, NSGA-II e NSGA-DO encontram diferentes conjuntos de soluções.

Inicialmente, todas as soluções da fronteira F_1 são selecionadas, porque o número de soluções desta fronteira é menor que o tamanho da população. Neste momento, NSGA-II e NSGA-DO encontram o mesmo conjunto de soluções:

$$S_{\text{NSGA-II}} = S_{\text{NSGA-DO}} = \{F_1S_1, F_1S_2, F_1S_3, F_1S_4, F_1S_5\}$$

Em seguida, três soluções devem ser selecionadas de F_2 . O operador *Crowding Distance* do NSGA-II escolhe as soluções com maior distância entre os seus vizinhos. Neste caso, as soluções S_1 e S_4 , porque elas estão localizadas nas extremidades da fronteira F_2 . A solução S_2 será a última selecionada porque

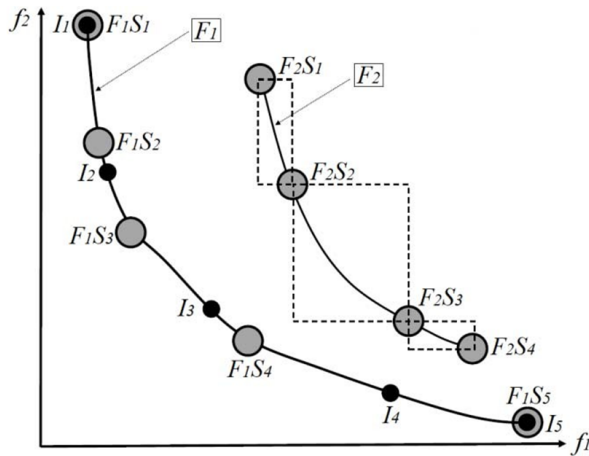


Figura 1: Diferença do operador de seleção do NSGA-II e NSGA-DO [13].

o seu valor de *crowding distance* é maior que da solução S_3 . Por outro lado, as soluções escolhidas pelo NSGA-DO são as mais próximas dos pontos ideais, que são S_3 , S_4 e S_2 . Portanto, o resultado final é:

$$S_{\text{NSGA-II}} = \{F_1S_1, F_1S_2, F_1S_3, F_1S_4, F_1S_5, F_2S_1, F_2S_4, F_2S_2\}$$

$$S_{\text{NSGA-DO}} = \{F_1S_1, F_1S_2, F_1S_3, F_1S_4, F_1S_5, F_2S_3, F_2S_4, F_2S_2\}$$

Um fato importante a ser destacado do NSGA-DO é que, se S soluções estiverem mais próximas a um único ponto ideal, as soluções selecionadas estarão concentradas nesta região da fronteira, comprometendo a diversidade das soluções.

O MNSGA-DO é uma variação do NSGA-DO que visa melhorar o seu desempenho. Mais especificamente, ao invés de definir os pontos ideais baseados na partição uniforme e no tamanho da fronteira Pareto-Ótima, o MNSGA-DO calcula uma partição uniforme baseada no número de soluções necessárias para completar a população que será enviada para a próxima geração. Desta forma, o tempo de convergência diminui devido à redução do número de pontos ideais, e consequentemente, pela redução na quantidade de cálculos de distância. Para melhorar a distribuição das soluções na fronteira Pareto-Ótima, o MNSGA-DO define que a quantidade de pontos ideais é igual à duas vezes o número de soluções necessárias. Além disso, o cálculo das distâncias entre as soluções e os pontos ideais ocorre da seguinte forma. Inicia-se de uma extremidade até o centro da fronteira Pareto-Ótima, trocando as extremidades a cada seleção de uma solução. Outra diferença neste processo é que o MNSGA-DO garante que uma solução estará associada à apenas um ponto ideal, evitando a concentração de soluções em um único ponto ideal, garantindo a diversidade das soluções.

IV. EXPERIMENTOS E RESULTADOS

Esta seção apresenta um estudo comparativo entre os algoritmos NSGA-II, NSGA-DO, MNSGA-DO na resolução de diferentes POM presentes no *benchmark* WFG. Para realização dos experimentos foi utilizado o framework JMetal [25],

versão 5.11, o qual implementa os indicadores de qualidade e as instâncias de testes aqui considerados.

A. Benchmark WFG

O conjunto de problemas de referência WFG foi proposto por Huband et al. [14]. Eles inicialmente desenvolveram um conjunto de ferramentas, chamado *WFG toolkit*, para a criação de problemas de teste multiobjetivo escalonáveis. O *WFG Toolkit* é flexível e permite que características como *viés*, multimodalidade e não separabilidade sejam incorporadas e combinadas em um mesmo problema. Várias geometrias para a Fronteira de Pareto também são permitidas, incluindo geometrias convexas, côncavas, mistas, lineares, degeneradas e descontínuas. A partir desse *toolkit*, Huband et al. construíram nove problemas (WFG1-WFG9) de teste, que são utilizados em diversas pesquisas de otimização multiobjetivo. As propriedades destes problemas são apresentadas na Tabela I.

Tabela I: Problemas-teste WFG.

Problema	Propriedades
WFG1	Convexa e enviesada
WFG2	Convexa, disconexa e multimodal
WFG3	Linear e degenerada
WFG4	Concava e Multimodal
WFG5	Concava
WFG6	Concava
WFG7	Concava e enviesada
WFG8	Concava e enviesada
WFG9	Concava, multimodal e enviesada

B. Indicadores de Qualidade das Soluções

Os indicadores de qualidade, ou medidas de desempenho, permitem quantificar o desempenho dos algoritmos em relação à determinados requisitos. Neste trabalho, serão avaliadas a convergência, que mede a proximidade das soluções encontradas com a *PF* ideal, e a diversidade (ou dispersão) das soluções, que indica o quão bem as soluções encontradas são representativas. Para isso, serão aplicados os indicadores *Distância Geracional (GD)* (do inglês, *Generational Distance*), *Distância Geracional Invertida (IGD)* (do inglês, *Inverted Generational Distance*), *Hipervolume (HV)* e *Spread (SP)* [26].

O indicador GD indica a convergência dos algoritmos ao calcular, para cada ponto da *PF** encontrada, a menor distância euclidiana à qualquer ponto da *PF* ideal. O IGD é considerado tanto uma métrica de convergência quanto uma métrica de diversidade, pois este calcula para cada ponto da *PF* ideal, a menor distância euclidiana à qualquer ponto da *PF** encontrada. A métrica HV também avalia a convergência e a diversidade, medindo o tamanho do espaço objetivo dominado pelas soluções em *PF** e limitados por um ponto de referência. Por fim, o *Spread* mede a extensão das soluções obtidas em relação a Fronteira Pareto-Ótima, indicando assim, a diversidade das soluções.

C. Operadores Genéticos

Os operadores genéticos utilizados foram o SBX (do inglês *Simulated Binary Crossover*) [27] e a mutação polinomial

[28]. Esses operadores são comumente utilizados em estudos comparativos de AGMO, como por exemplo, nos trabalhos de [29]–[34]. Os parâmetros dos operadores genéticos de cruzamento e mutação são apresentados na Tabela II, os quais foram baseados nos estudos de Figueiredo [35], Gong et al. [36] e Nebro e Durillo [37].

Tabela II: Parâmetros dos operadores de mutação e cruzamento.

Operador Genético	Parâmetro	WFG
2* Mutação Polinomial	Probabilidade de mutação (p_m)	20
	Índice de distribuição para mutação (n_m)	
2* Cruzamento Binário Simulado (SBX)	Probabilidade de cruzamento (p_c)	0.9
	Índice de distribuição para cruzamento (n_c)	20

Os resultados são apresentados através de gráficos das PFs^* encontradas de cada AGMO, para cada instância de teste, e por meio de tabelas com o valor médio dos indicadores GD, IGD, *Spread* e HV, e seus respectivos valores de desvio padrão. Para facilitar a análise das tabelas, algumas células estão destacadas em dois tons de cinza. O tom mais escuro indica o algoritmo que obteve o melhor desempenho, e o mais claro indica o algoritmo que obteve o segundo melhor desempenho. O melhor desvio padrão está sublinhado.

D. Experimentos com Problemas WFG

Para os problemas da família WFG foram utilizadas 24 variáveis de decisão em todas as instâncias, com $k = 4$ (parâmetro de posição), $L = 20$ (parâmetro de distância) e 500 gerações. Esses valores para os parâmetros de posição e distâncias, que controlam a complexidade dos problemas, foram os mesmos adotados nos estudos de Huband et al. [14], Bradstreet et al. [38] e Nebro e Durillo [37].

A Figura 2 ilustra as melhores fronteiras encontradas por cada um dos três AGMO segundo o indicador de qualidade hipervolume (HV). A partir da análise das fronteiras, observamos que o NSGA-DO, apesar de conduzir as soluções para regiões ótimas do espaço objetivo, apresenta dificuldades em preservar a diversidade nos conjuntos de soluções encontrados, pois há *gaps* e aglomeração de soluções. Entre os algoritmos NSGA-II e MNSGA-DO, observamos que ambos apresentam, além de boa convergência, uma boa diversidade. Uma análise mais atenciosa evidencia ainda que o MNSGA-DO apresenta uma melhor distribuição das soluções para as instâncias de teste WFG1 e WFG2, em que, notoriamente, o MNSGA-DO povoa uma região maior da fronteira.

A Tabela III apresenta os resultados para os indicadores de qualidade, seguidos dos respectivos desvios-padrões. Sobre o indicador GD, não se observa um consenso sobre qual algoritmo obtém os melhores resultados. Em relação ao desvio padrão, o NSGA-DO novamente apresentou os piores resultados, com as maiores variações. Entre os outros dois algoritmos,

o MNSGA-DO apresentou menor variação para a maioria das instâncias de teste.

Segundo os indicadores IGD e HV, o NSGA-II conseguiu superar o MNSGA-DO somente para as instâncias de teste WFG1, WFG2 e WFG8. Já no indicador SP, o MNSGA-DO supera o NSGA-II em todas as instâncias de teste. Sobre o desvio padrão, para a maioria das instâncias de teste, as menores variações estão associadas ao MNSGA-DO seguido pelo NSGA-II. Para esses três indicadores, o NSGA-DO apresentou os piores resultados.

Os resultados ilustrados na Figura 2 e os descritos na Tabela III confirmam que a proposta do operador de seleção do MNSGA-DO melhorou tanto a convergência quanto a diversidade das soluções obtidas, em comparação aos algoritmos NSGA-II e NSGA-DO.

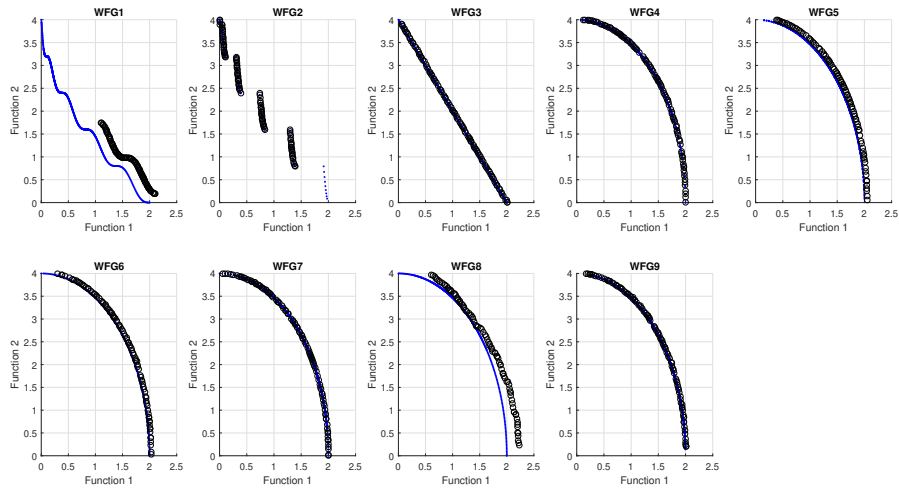
Tabela III: Indicadores de qualidade para os problemas da família WFG.

	Generation Distance (GD)					
	NSGA-DO		MNSGA-DO		NSGA-II	
WFG1	1.01e-02	7.5e-03	4.14e-03	2.1e-03	3.33e-03	2.0e-03
WFG2	6.36e-04	5.2e-04	5.20e-04	3.7e-05	5.08e-04	4.1e-05
WFG3	3.49e-04	1.1e-04	4.06e-04	6.9e-05	5.32e-04	7.3e-05
WFG4	1.51e-03	3.1e-04	6.85e-04	3.3e-05	6.98e-04	4.7e-05
WFG5	1.54e-02	5.7e-03	2.72e-03	9.0e-06	2.70e-03	2.8e-05
WFG6	1.52e-03	2.8e-04	2.21e-03	4.3e-04	2.28e-03	3.4e-04
WFG7	2.17e-03	3.0e-04	3.21e-04	1.5e-05	3.77e-04	4.0e-05
WFG8	5.25e-03	7.7e-04	6.44e-03	8.5e-05	6.10e-03	1.6e-04
WFG9	1.66e-02	1.7e-02	3.37e-03	2.0e-03	3.90e-03	1.9e-03

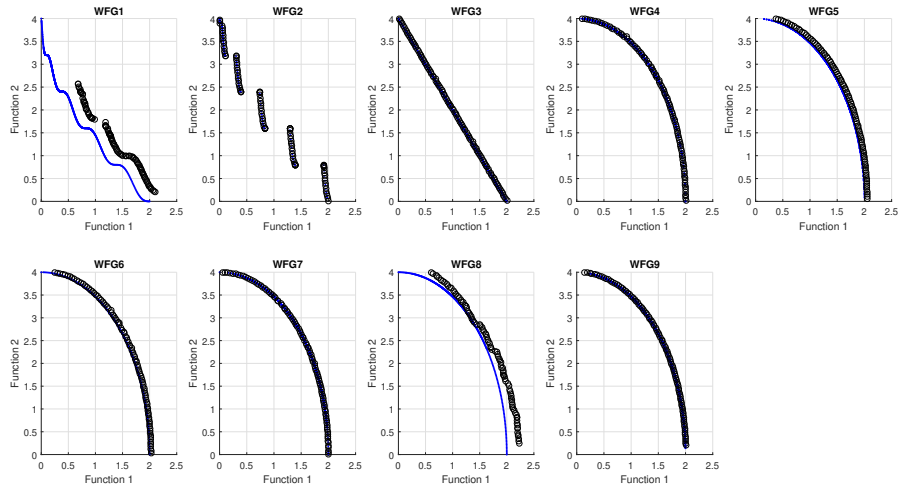
	Inverse Generation Distance (IGD)					
	NSGA-DO		MNSGA-DO		NSGA-II	
WFG1	1.56e-02	1.4e-03	8.18e-03	3.6e-03	4.39e-03	7.5e-04
WFG2	1.62e-02	6.9e-03	8.03e-03	2.0e-03	7.42e-03	1.3e-03
WFG3	7.14e-03	4.7e-03	1.98e-04	1.9e-05	2.64e-04	2.0e-05
WFG4	2.06e-03	2.3e-03	1.73e-04	7.0e-06	1.91e-04	1.5e-05
WFG5	2.68e-02	4.9e-03	9.53e-04	2.9e-06	9.75e-04	6.2e-06
WFG6	1.70e-02	5.6e-03	1.11e-03	2.1e-04	1.16e-03	1.7e-04
WFG7	4.61e-03	3.1e-03	1.00e-04	3.0e-06	1.27e-04	8.3e-06
WFG8	1.18e-02	5.9e-03	1.99e-03	8.0e-05	1.93e-03	6.0e-05
WFG9	7.91e-03	5.0e-03	6.07e-04	4.7e-04	7.42e-04	4.5e-04

	Spread (SP)					
	NSGA-DO		MNSGA-DO		NSGA-II	
WFG1	1.25e+00	1.3e-01	5.74e-01	1.0e-01	5.80e-01	3.0e-02
WFG2	1.56e+00	1.9e-01	7.63e-01	9.3e-03	7.81e-01	1.1e-02
WFG3	1.83e+00	1.4e-01	1.50e-01	2.3e-02	3.43e-01	3.2e-02
WFG4	1.35e+00	2.6e-01	2.82e-01	1.8e-02	3.68e-01	2.9e-02
WFG5	1.03e+00	1.1e-01	2.53e-01	9.2e-03	3.92e-01	2.8e-02
WFG6	1.80e+00	9.1e-02	2.65e-01	1.5e-02	3.81e-01	3.0e-02
WFG7	1.79e+00	1.2e-01	2.47e-01	1.8e-02	3.57e-01	2.8e-02
WFG8	1.74e+00	6.9e-02	3.68e-01	2.3e-02	4.19e-01	2.2e-02
WFG9	1.32e+00	5.5e-01	3.02e-01	2.5e-02	4.20e-01	3.2e-02

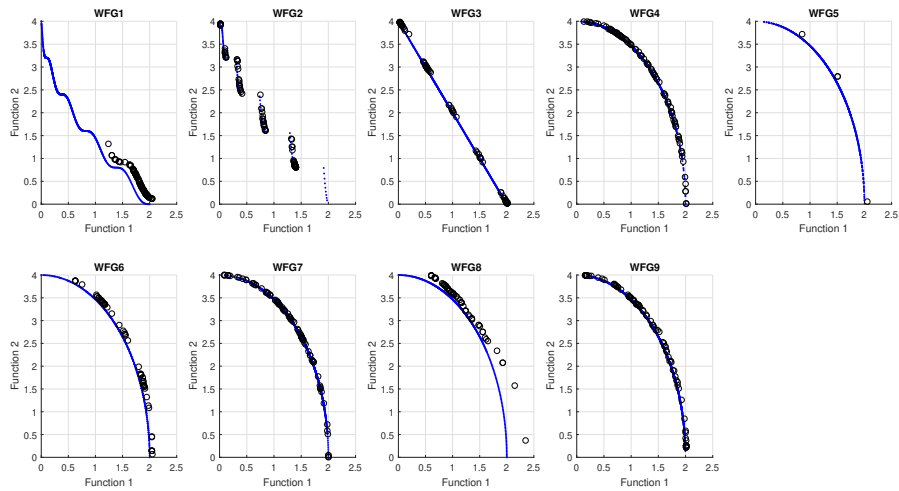
	Hypervolume (HV)					
	NSGA-DO		MNSGA-DO		NSGA-II	
WFG1	2.63e-01	3.9e-02	4.65e-01	7.0e-02	5.41e-01	3.0e-02
WFG2	3.90e-01	1.3e-01	5.56e-01	1.2e-02	5.59e-01	7.2e-04
WFG3	2.69e-01	1.5e-01	4.90e-01	1.1e-03	4.88e-01	1.2e-03
WFG4	1.66e-01	4.3e-02	2.16e-01	4.2e-04	2.15e-01	5.3e-04
WFG5	5.58e-03	2.1e-02	1.96e-01	1.1e-04	1.94e-01	3.4e-04
WFG6	2.71e-02	3.2e-02	1.82e-01	5.2e-03	1.81e-01	4.1e-03
WFG7	9.70e-02	5.0e-02	2.09e-01	2.4e-04	2.08e-01	4.0e-04
WFG8	2.88e-02	2.8e-02	1.62e-01	1.9e-03	1.63e-01	1.5e-03
WFG9	6.09e-02	7.0e-02	2.05e-01	3.0e-02	1.96e-01	2.9e-02



(a) NSGA-II.



(b) MNSGA-DO.



(c) NSGA-DO.

Figura 2: PFs^* encontradas pelos AGMO para o benchmark WFG.

Para analisar a significância das diferenças entre os resultados foi utilizado o teste estatístico de Wilcoxon [39], com nível de confiança de 95%. Os resultados estão descritos na Tabela IV, na qual o símbolo – significa que a hipótese nula foi aceita, e os símbolos triângulo preto e triângulo invertido significam que a hipótese nula foi rejeitada. O triângulo preto indica que o algoritmo da linha da tabela é significativamente melhor que o algoritmo da coluna, e o triângulo invertido indica o oposto. Cada símbolo -, triângulo preto e triângulo invertido se refere a um problema do WFG, ou seja, o primeiro símbolo se refere ao WFG1, o segundo símbolo se refere ao WFG2, e assim por diante.

Baseado nos resultados da Tabela IV e considerando o indicador GD, o NSGA-DO foi significativamente melhor que o MNSGA-DO e NSGA-II para os problemas WFG3, WFG6 e WFG8. Já o MNSGA-DO, apesar de ter os melhores valores de GD para WFG4, WFG7 e WFG9 (Tabela III), somente o GD para o WFG7 é estatisticamente melhor do que os outros dois algoritmos. Situação semelhante ocorre com o NSGA-II, pois possui melhores valores de GD para WFG1, WFG2 e WFG5, no entanto, somente o valor de GD para WFG5 é significativamente melhor.

Em relação ao indicador IGD, o NSGA-II obteve os melhores resultados para WFG1, WFG2 e WFG8 (Tabela III), mas somente os valores de IGD para WFG1 e WFG8 são estatisticamente melhores do que os outros. Por outro lado, o MNSGA-DO obteve os melhores valores de IGD para os demais problemas: WFG3, WFG4, WFG5, WFG6, WFG7 e WFG9. Dentre estes, somente os valores de IGD para WFG3, WFG4, WFG5, WFG7 e WFG9 são estatisticamente melhores.

Analisando o indicador SP, o MNSGA-DO obteve os melhores resultados para todos os problemas (Tabela III), no entanto, o SP para WFG1 é considerado estatisticamente igual ao NSGA-II. Para todos os demais problemas o MNSGA-DO é significativamente melhor.

Por fim, para o indicador HV, o MNSGA-DO e o NSGA-II também superaram o NSGA-DO para todos os problemas. Comparando o MNSGA-DO e o NSGA-II, verifica-se que o MNSGA-DO apresenta melhores resultados para os problemas WFG3, WFG4, WFG5, WFG6, WFG7 e WFG9, sendo estatisticamente superior nos problemas WFG3, WFG4, WFG5, WFG7 e WFG9. Já o NSGA-II é superior em resultados nos problemas WFG1, WFG2 e WFG8, mas significativamente melhor apenas para o problema WFG1.

Tabela IV: Resultados estatísticos.

GD	MNSGA-DO	NSGA-II
	NSGA-DO	▽ – ▲ ▽ ▽ ▲ ▽ ▲ ▽
MNSGA-DO		-- ▲ - ▽ - ▲ ▽ -
IGD	NSGA-DO	▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽
	MNSGA-DO	▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽
SP	NSGA-DO	▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽
	MNSGA-DO	- ▲ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲
HV	NSGA-DO	▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽
	MNSGA-DO	▽ - ▲ ▲ ▲ - ▲ - ▲

V. CONCLUSÃO

Neste artigo, investigamos o comportamento do MNSGA-DO quando aplicado a problemas de otimização multiobjetivo considerando diferentes dificuldades no espaço de decisão e com diferentes formas da fronteira de Pareto. Para isso, utilizamos o conjunto de problemas de referência WFG, e comparamos os resultados com os algoritmos NSGA-II e NSGA-DO, analisando a convergência e a diversidade destes três AGMO com base em quatro indicadores de qualidade, GD, IGD, *Spread* e HV.

Analisando as fronteiras de Pareto dos algoritmos, foi possível verificar que os resultados obtidos pelo NSGA-DO estão concentrados em alguns pontos, principalmente nos problemas WFG1, WFG3, WFG5 e WFG8. Esse resultado pode ser explicado pelo processo de seleção de indivíduos do NSGA-DO, que permite que um ponto ideal selecione várias soluções e outro ponto poucas soluções ou até nenhuma, levando à aglomeração de soluções em regiões do espaço objetivo. O NSGA-DO, proposto para melhorar a distribuição de soluções ao longo da fronteira de Pareto, falha em superar a distância de multidão do NSGA-II em problemas contínuos. Por outro lado, o MNSGA-DO e o NSGA-II apresentam convergência e diversidade similares visualmente, sendo que o MNSGA-DO se comporta de forma mais satisfatória nos problemas WFG1 e WFG2.

De acordo com valores apresentados na Tabela III e com a análise estatística mostrada na Tabela IV, é possível verificar que o MNSGA-DO e o NSGA-II são superiores ao NSGA-DO para todos os indicadores de qualidade. Tomando por base os indicadores IGD, *Spread* e HV, o MNSGA-DO foi significativamente melhor que o NSGA-II. Estes resultados demonstram a aplicabilidade e eficiência do MNSGA-DO na solução de problemas contínuos de otimização multiobjetivo com espaço de decisão e espaço objetivo considerados complexos.

REFERÊNCIAS

- [1] R. Saborido, A. B. Ruiz, J. D. Bermúdez, E. Vercher, and M. Luque, "Evolutionary multi-objective optimization algorithms for fuzzy portfolio selection," *Applied Soft Computing*, vol. 39, pp. 48–63, 2016.
- [2] C. Guerrero, I. Lera, and C. Juiz, "Genetic algorithm for multi-objective optimization of container allocation in cloud architecture," *Journal of Grid Computing*, vol. 16, 2017.
- [3] T. C. Bora, V. C. Mariani, and L. dos Santos Coelho, "Multi-objective optimization of the environmental-economic dispatch with reinforcement learning based on non-dominated sorting genetic algorithm," *Applied Thermal Engineering*, vol. 146, pp. 688–700, 2019.
- [4] T. George and T. Amudha, *Genetic Algorithm Based Multi-objective Optimization Framework to Solve Traveling Salesman Problem*, 2020.
- [5] X. Xu, S. Fu, W. Li, F. Dai, H. Gao, and V. Chang, "Multi-objective data placement for workflow management in cloud infrastructure using nsga-ii," *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, vol. 4, pp. 605–615, 2020.
- [6] L. Zhang, L. Chen, S. Xia, Y. Ge, C. Wang, and H. Feng, "Multi-objective optimization for helium-heated reverse water gas shift reactor by using nsga-ii," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 148, p. 119025, 2020. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931018359052>
- [7] S. Jiang, J. Zou, S. Yang, and X. Yao, "Evolutionary dynamic multi-objective optimisation: A survey," *ACM Comput. Surv.*, vol. 55, 11 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1145/3524495>

- [8] E. Zitzler, K. Deb, and L. Thiele, "Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results," *Evolutionary Computation*, vol. 8, pp. 173–195, 2000.
- [9] K. Deb, L. Thiele, M. Laumanns, and E. Zitzler, *Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization*. Springer, 2005.
- [10] S. Huband, L. Barone, L. While, and P. Hingston, "A scalable multi-objective test problem toolkit." Springer Berlin Heidelberg, 2005, pp. 280–295.
- [11] H. Li and Q. Zhang, "Multiobjective optimization problems with complicated pareto sets, moea/d and nsga-ii," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 13, pp. 284–302, 2009.
- [12] J. G. Machado, M. G. Pires, F. C. Bertoni, A. H. d. M. P. Pimenta, and H. A. Camargo, "A modified nsga-do for solving multiobjective optimization problems," in *Conference proceedings BRACIS 2021, Part of the Lecture Notes in Computer Science book series (LNCS, volume 13073)*, 2021, pp. 126–139.
- [13] A. Pimenta and H. Camargo, "Nsga-do: Non-dominated sorting genetic algorithm distance oriented," in *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2015, pp. 1–8.
- [14] S. Huband, P. Hingston, L. Barone, and L. While, "A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 10, no. 5, pp. 477–506, 2006.
- [15] K. Li, K. Deb, Q. Zhang, and S. Kwong, "An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 19, pp. 694–716, 2015.
- [16] N. Srinivas and K. Deb, "Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms," *Evolutionary Computation*, vol. 2, no. 3, pp. 221–248, 1994.
- [17] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, and T. Meyarivan, "A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 6, pp. 182–197, 4 2002.
- [18] E. O. Rangel, D. G. Costa, and A. Loula, "On redundant coverage maximization in wireless visual sensor networks: Evolutionary algorithms for multi-objective optimization," *Applied Soft Computing*, vol. 82, p. 105578, 2019.
- [19] E. Parvizi and M. H. Rezvani, "Utilization-aware energy-efficient virtual machine placement in cloud networks using nsga-iii meta-heuristic approach," *Cluster Computing*, pp. 1–23, 2020.
- [20] X. Xu, S. Fu, W. Li, F. Dai, H. Gao, and V. Chang, "Multi-objective data placement for workflow management in cloud infrastructure using nsga-ii," *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, vol. 4, no. 5, pp. 605–615, 2020.
- [21] V. Kanwar and A. Kumar, "Multiobjective optimization-based dv-hop localization using nsga-ii algorithm for wireless sensor networks," *International Journal of Communication Systems*, vol. 33, no. 11, p. e4431, 2020.
- [22] R. Azzouz, S. Bechikh, and L. Ben Said, "Multi-objective optimization with dynamic constraints and objectives: new challenges for evolutionary algorithms," in *Proceedings of the 2015 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*, 2015, pp. 615–622.
- [23] M. Akbar and T. Irohara, "Nsga-ii variants for solving a social-conscious dual resource-constrained scheduling problem," *Expert Systems with Applications*, vol. 162, p. 113754, 2020.
- [24] T. F. de Queiroz Lafetá and G. M. B. de Oliveira, "Applying dynamic evolutionary optimization to the multiobjective knapsack problem," in *Brazilian Conference on Intelligent Systems*. Springer, 2020, pp. 49–63.
- [25] J. J. Durillo and A. J. Nebro, "jmetal: A java framework for multi-objective optimization," *Advances in Engineering Software*, vol. 42, no. 10, pp. 760–771, 2011.
- [26] C. Audet, J. Bignon, D. Cartier, S. Le Digabel, and L. Salomon, "Performance indicators in multiobjective optimization," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 292, no. 2, pp. 397–422, 2021.
- [27] K. Deb, R. B. Agrawal *et al.*, "Simulated binary crossover for continuous search space," *Complex systems*, vol. 9, pp. 115–148, 1995.
- [28] K. Deb and S. Agrawal, "A niched-penalty approach for constraint handling in genetic algorithms," in *Artificial Neural Nets and Genetic Algorithms*, 1999, pp. 235–243.
- [29] K. Deb and H. Jain, "An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part i: solving problems with box constraints," *IEEE transactions on evolutionary computation*, vol. 18, no. 4, pp. 577–601, 2013.
- [30] K. Li, K. Deb, Q. Zhang, and S. Kwong, "An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 19, no. 5, pp. 694–716, 2014.
- [31] H. Seada and K. Deb, "U-nsga-iii: a unified evolutionary optimization procedure for single, multiple, and many objectives: proof-of-principle results," in *International conference on evolutionary multi-criterion optimization*. Springer, 2015, pp. 34–49.
- [32] H. Ishibuchi, R. Imada, Y. Setoguchi, and Y. Nojima, "Performance comparison of nsga-ii and nsga-iii on various many-objective test problems," in *2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*. IEEE, 2016, pp. 3045–3052.
- [33] R. de Souza Ribeiro, "Comparação de algoritmos evolucionários para problemas com muitos objetivos," Ph.D. dissertation, Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.
- [34] E. M. d. N. Figueiredo, "Uma nova abordagem baseada em enxames de partículas para otimização de muitos objetivos," Ph.D. dissertation, Universidade Federal de Pernambuco, <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/25629>, 2 2017.
- [35] A. J. Nebro, J. J. Durillo, C. A. C. Coello, F. Luna, and E. Alba, "A study of convergence speed in multi-objective metaheuristics," in *International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*. Springer, 2008, pp. 763–772.
- [36] D. Gong, J. Sun, and Z. Miao, "A set-based genetic algorithm for interval many-objective optimization problems," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 22, no. 1, pp. 47–60, 2016.
- [37] A. J. Nebro and J. J. Durillo, "On the effect of applying a steady-state selection scheme in the multi-objective genetic algorithm nsga-ii," in *Nature-Inspired Algorithms for Optimisation*. Springer, 2009, pp. 435–456.
- [38] L. Bradstreet, L. Barone, L. While, S. Huband, and P. Hingston, "Use of the wfg toolkit and pisa for comparison of moeas," in *2007 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Multi-Criteria Decision-Making*. IEEE, 2007, pp. 382–389.
- [39] F. Wilcoxon, "Individual comparisons by ranking methods," in *Breakthroughs in statistics*. Springer, 1992, pp. 196–202.