Algoritmo de Filtro de Kalman Baseado em Modelo *Fuzzy* Tipo-2 Evolutivo para Rastreamento Intervalar de Dados Experimentais

1st Daiana Caroline dos Santos Gomes
Universidade Federal do Maranhão
São Luís - MA, Brazil
daianagomes159@gmail.com

2nd Ginalber Luiz de Oliveira Serra
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão
São Luís - MA, Brazil
ginalber@ifma.edu.br

***Abstract*—Neste artigo, um filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo é proposto para o processamento intervalar de dados experimentais a partir de componentes espectrais não-observáveis. A metodologia adotada considera as seguintes etapas: um modelo inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo é identificado de forma *off-line* a partir de uma janela inicial de dados experimentais; a atualização da proposição do antecedente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo é realizada usando uma formulação *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno (eTS) e a atualização da proposição consequente é realizada usando uma formulação *fuzzy* tipo-2 do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID), levando em consideração as componentes espectrais não-observáveis extraídas dos dados experimentais por meio de um algoritmo de Análise Espectral Singular Recursiva Multivariável. Resultados experimentais e análise comparativa referentes ao rastreamento intervalar de um helicóptero 2DoF ilustram a eficiência da metodologia proposta.**

***Index Terms*—Identificação de Sistemas, Filtragem de Kalman, Modelo *fuzzy* tipo-2 intervalar, Análise Espectral Singular, Sistemas *fuzzy* evolutivos.**

I. Introdução

A modelagem *fuzzy* a partir de dados experimentais tem sido largamente desenvolvida e aplicada com sucesso em diferentes domínios de aplicação, tais como biomédica [1], epidemiologia [2], processamento digital de imagem [3], reconhecimento de padrão [4], controle e automação de sistemas dinâmicos [5], [6], entre outros. O interesse crescente da comunidade científica pelos sistemas *fuzzy* é devido a algumas de suas vantagens sobre outras técnicas de inteligência artificial, tais como a sua capacidade de combinar o conhecimento do especialista com informações extraídas de dados experimentais, sua fácil formulação e implementação, maior interpretabilidade e alta precisão no tratamento de não-linearidades e incertezas [7]. Portanto, os sistemas *fuzzy* representam uma poderosa ferramenta para solucionar problemas nas ciências e engenharias, uma vez que eles fornecem modelos altamente precisos com melhor interpretabilidade [8], [9].

O nível de complexidade e incerteza associados a problemas práticos tem motivado o desenvolvimento de sistemas *fuzzy* tipo-2 no contexto evolutivo com aplicações em diversas áreas de estudo [10]. Uma vez que grande parte dos métodos de projeto e análise de sistemas *fuzzy* tipo-2 utilizam apenas informações linguísticas do especialista [7] e, considerando o crescente volume de dados e informações pertinentes a sistemas dinâmicos, propostas de metodologias para projeto de sistemas *fuzzy* tipo-2 evolutivos, levando em consideração o processamento de dados experimentais incertos, é um campo de pesquisa ainda em aberto [11], [12].

Em problemas práticos, é comum a distorção das informações contidas em dados experimentais, obtidos por meio de sensores, devido à presença de ruídos [13]. Neste sentido, algoritmos de aprendizagem eficientes e com melhor desempenho, desenvolvidos para aplicações neste contexto, são bastante procurados. O filtro de Kalman, desde que foi proposto em 1960, constitui uma das principais ferramentas matemáticas utilizadas no processamento de dados experimentais ruidosos [14], [15]. Diante disso, este artigo consiste no projeto de filtros de Kalman usando modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno tipo-2 evolutivos considerando o processamento intervalar e espectral de dados experimentais incertos por meio de uma formulação multivariável e recursiva do método de Análise Espectral Singular.

A metodologia proposta neste artigo consiste em duas etapas. Na primeira etapa é realizada a estimação paramétrica inicial do modelo do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo e sua estrutura é atualizada, recursivamente, de acordo com a dinâmica inerente aos dados experimentais. Na segunda etapa, a atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, a parametrização da proposição do antecedente é realizada por meio do particionamento evolutivo dos dados experimentais através de uma formulação *fuzzy* tipo-2 do algoritmo *evolving* Takagi-Sugeno (eTS), proposta neste artigo, e a parametrização da proposição do consequente é realizada por meio de uma formulação *fuzzy* tipo-2 recursiva do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID), proposta em [16], a qual é baseada nas componentes espectrais não-observáveis extraídas a partir dos dados experimentais.

II. Metodologia Proposta: Filtragem de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Evolutiva

Nesta seção, a metodologia proposta para o projeto do Filtro de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 Evolutivo, a partir de componentes espectrais não-observáveis extraídas de dados experimentais incertos, é apresentada.

A. Pré-Processamento de Dados por Análise Espectral Singular Multivariável

A Análise Espectral Singular (AES) é uma técnica de processamento de dados que tem por objetivo a decomposição de séries temporais originais em componentes espectrais não-observáveis interpretáveis [17]. Uma formulação recursiva multivariável do algoritmo AES é proposta, a qual é descrita a seguir.

1) Estimação Inicial das Componentes Espectrais Não-Observáveis: Considerando a janela inicial de dados experimentais multivariável $\mathbf{y}$ referente a p séries temporais, com N amostras, dada por:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad \dots \quad \mathbf{y}_N], \qquad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{p\times N} \tag{1}$$

onde $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$, tal que $k = 1, \dots, N$, é o vetor composto pelas observações da série temporal p na amostra k. Uma matriz trajetória $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ é construída considerando as p dimensões de $\mathbf{y}$ como segue:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \cdots & \mathbf{y}_\rho \\ \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & \cdots & \mathbf{y}_{\rho+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_\delta & \mathbf{y}_{\delta+1} & \mathbf{y}_{\delta+2} & \cdots & \mathbf{y}_N \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{H}} \in \mathbb{R}^{p\delta\times\rho} \tag{2}$$

onde $2 \leq \delta \leq N-1$ é um parâmetro definido pelo usuário e $\rho = N - \delta + 1$. Uma matriz de covariância $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ é calculada como segue:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{H}}^T, \qquad \boldsymbol{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{p\delta\times p\delta} \tag{3}$$

A Decomposição em Valores Singulares (SVD) da matriz $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ é equivalente à SVD de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ e resulta em uma coleção de δ autovalores ($\sigma^1 \geq \sigma^2 \geq \cdots \geq \sigma^\delta \geq 0$) e δ autovetores ($\boldsymbol{\phi}^1, \boldsymbol{\phi}^2, \dots, \boldsymbol{\phi}^\delta$). A SVD de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ resulta em:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}^1 + \boldsymbol{\mathcal{H}}^2 + \cdots + \boldsymbol{\mathcal{H}}^d \tag{4}$$

onde $d = max\,\{\varrho,\ \text{tal que}\ \sigma^\varrho > 0\}$ e a matriz $\boldsymbol{\mathcal{H}}^\varrho|^{\varrho=1,\dots,d}$ é obtida por:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^\varrho = \sqrt{\sigma^\varrho}\boldsymbol{\phi}^\varrho\mathbf{V}^{\varrho T}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{H}}^\varrho \in \mathbb{R}^{\delta\times\rho} \tag{5}$$

onde

$$\mathbf{V}^\varrho = \frac{\boldsymbol{\mathcal{H}}^T\boldsymbol{\phi}^\varrho}{\sqrt{\sigma^\varrho}}, \qquad \varrho = 1, \dots, d \tag{6}$$

As matrizes $\boldsymbol{\mathcal{H}}^\varrho|^{\varrho=1,\dots,d}$, obtidas a partir da Equação (5), são reagrupadas em ξ termos disjuntos, tal que $\xi \leq d$, como segue:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{I}}^1 + \boldsymbol{\mathcal{I}}^2 + \cdots + \boldsymbol{\mathcal{I}}^\xi \tag{7}$$

onde $\boldsymbol{\mathcal{I}}^j|^{j=1,\dots,\xi}$ são os termos resultantes após o reagrupamento das matrizes $\boldsymbol{\mathcal{H}}^\varrho|^{\varrho=1,\dots,d}$ e ξ corresponde ao número de componentes espectrais não-observáveis extraídas dos dados experimentais, o qual é um parâmetro definido pelo usuário. Considerando $\delta^* = \min(\delta, \rho)$ e $\rho^* = \max(\delta, \rho)$, o vetor $\boldsymbol{\alpha}^j$ que contém as ξ componentes espectrais não-observáveis referentes às p séries temporais de dados experimentais é obtido de $\boldsymbol{\mathcal{I}}^j|^{j=1,\dots,\xi}$, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\alpha}_k^j = \begin{cases} \frac{1}{k}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{k+1}\boldsymbol{\mathcal{I}}^j_{\nu,k-\nu+1} & 1 \leq k \leq \delta^* \\ \frac{1}{\delta^*}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\delta^*}\boldsymbol{\mathcal{I}}^j_{\nu,k-\nu+1} & \delta^* \leq k \leq \rho^* \\ \frac{1}{N-k+1}\displaystyle\sum_{\nu=k-\rho^*+1}^{N-\rho^*+1}\boldsymbol{\mathcal{I}}^j_{\nu,k-\nu+1} & \rho^* < k \leq N \end{cases} \tag{8}$$

2) Atualização Recursiva das Componentes Espectrais Não-Observáveis: Após a inicialização do algoritmo de análise espectral singular recursiva multivariável, conforme descrito na Seção II-A1, as componentes espectrais não-observáveis são atualizadas em $k = N+1,\ N+2, \dots$ conforme formulado a seguir. A variável ρ é atualizada da seguinte forma:

$$\rho = k - \delta + 1 \tag{9}$$

e a matriz de covariância $\boldsymbol{\mathcal{S}}_k$ é atualizada para o instante de tempo k como segue:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_k = \boldsymbol{\mathcal{S}}_{k-1} + \boldsymbol{\Upsilon}_k, \qquad \boldsymbol{\mathcal{S}}_k \in \mathbb{R}^{p\delta\times p\delta} \tag{10}$$

onde $\boldsymbol{\Upsilon}_k = \boldsymbol{\psi}_k\boldsymbol{\psi}_k^T \in \mathbb{R}^{p\delta\times p\delta}$ com $\boldsymbol{\psi}_k = [\mathbf{y}_\rho, \mathbf{y}_{\rho+1}, \dots, \mathbf{y}_k]^T$. O conjunto de autovalores $\sigma_k^1, \sigma_k^2, \dots, \sigma_k^\delta$ e seus respectivos autovetores $\boldsymbol{\phi}_k^1, \boldsymbol{\phi}_k^2, \dots, \boldsymbol{\phi}_k^\delta$ são atualizados no instante de tempo k a partir da aplicação do procedimento de SVD para atualização da matriz de covariância $\boldsymbol{\mathcal{S}}_k$, tal que $\mathbf{y}_k$ pode ser reescrito como segue:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k^1 + \mathbf{h}_k^2 + \cdots + \mathbf{h}_k^d \tag{11}$$

onde $\mathbf{h}_k^\varrho = \kappa_k^\varrho\boldsymbol{\psi}_k^T\boldsymbol{\phi}_k^\varrho$, $\varrho = 1, \dots, d$, tal que κ_k^ϱ corresponde ao último elemento do autovetor $\boldsymbol{\phi}_k^\varrho$. Os termos $\mathbf{h}_k^\varrho|^{\varrho=1,\dots,d}$ são reagrupados em ξ termos disjuntos $\boldsymbol{\mathcal{I}}_k^j|^{j=1,\dots,\xi}$, como segue:

$$\mathbf{y}_k = \boldsymbol{\mathcal{I}}_k^1 + \boldsymbol{\mathcal{I}}_k^2 + \ldots + \boldsymbol{\mathcal{I}}_k^\xi \tag{12}$$

onde $\boldsymbol{\mathcal{I}}_k^j = \boldsymbol{\alpha}_k^j$, com $j = 1, \dots, \xi$ e $k = N+1,\ N+2, \dots$.

B. Estimação Paramétrica do Filtro de Kalman Fuzzy Tipo-2 Evolutivo

O filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo apresenta a $i|^{[i=1,2,\dots,L]}$-ésima regra *fuzzy*, como segue:

$$R^{(i)}: \qquad \text{SE } \boldsymbol{\mathcal{Z}}_k \text{ É } \widetilde{W}^i$$

$$\text{ENTÃO } \begin{cases} \widetilde{\hat{\mathbf{x}}}_{k+1}^i = \widetilde{\mathbf{A}}_k^i\widetilde{\hat{\mathbf{x}}}_k^i + \widetilde{\mathbf{B}}_k^i\mathbf{u}_k + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i \\ \widetilde{\hat{\mathbf{y}}}_k^i = \widetilde{\mathbf{C}}_k^i\widetilde{\hat{\mathbf{x}}}_k^i + \widetilde{\mathbf{D}}_k^i\mathbf{u}_k \end{cases} \tag{13}$$

onde a proposição do antecedente é definida pelos seguintes termos:

- $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k \in \mathbb{R}^{r\times N}$ é a variável linguística da proposição do antecedente com r séries temporais e N amostras;
- $\widetilde{W}^i$ é o conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar correspondente a i-ésima regra;

e a proposição do consequente é definida por um submodelo no espaço de estados como segue:

- $\widetilde{\hat{\mathbf{x}}}_k^i = \left[\widetilde{\hat{x}}_{1_k}^i \ \ldots \ \widetilde{\hat{x}}_{n_k}^i\right]^T \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados intervalar estimado com n-ésima ordem;
- $\widetilde{\hat{\mathbf{y}}}_k^i = \left[\widetilde{\hat{y}}_{1_k}^i \ \ldots \ \widetilde{\hat{y}}_{p_k}^i\right]^T \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas local intervalar estimado;
- $\mathbf{u}_k = [u_{1_k} \ \ldots \ u_{m_k}]^T \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de entrada;
- $\widetilde{\mathbf{A}}_k^i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_k^i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\widetilde{\mathbf{C}}_k^i \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\widetilde{\mathbf{D}}_k^i \in \mathbb{R}^{p\times m}$ e $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i \in \mathbb{R}^{n\times p}$ são, respectivamente, matriz de estados, matriz de entrada, matriz de saída, matriz de transmissão direta e matriz de ganho de Kalman, os quais são parâmetros intervalares;
- $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i = [\underline{\boldsymbol{\epsilon}}_k \quad \overline{\boldsymbol{\epsilon}}_k]$ é o vetor de erro residual, o qual serve como mecanismo de ajuste para a estimação dos ganhos de Kalman do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo.

1) Estimação Inicial da Proposição do Antecedente do Filtro de Kalman Fuzzy Tipo-2 Evolutivo: A proposição do antecedente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo proposto é inicialmente estimada pelo algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel tipo-2 intervalar, conforme descrito a seguir. Seja os dados experimentais $\boldsymbol{\mathcal{Z}} \in \mathbb{R}^{p\times N}$, a primeira etapa do algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel tipo-2 intervalar é o cálculo dos protótipos dos *clusters* $\widetilde{\mathbf{v}}^{i^{(l)}}$, com base na matriz de partição inicial aleatória $\widetilde{\mathbf{U}}^{(0)} \in \mathbb{R}^{L\times N}$, como segue:

$$\widetilde{\mathbf{v}}^{i^{(l)}} = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left(\widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k)^{(l-1)}\right)^{\widetilde{m}}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k}{\sum_{k=1}^{N}\left(\widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k)^{(l-1)}\right)^{\widetilde{m}}}, \quad 1\le i\le L \tag{14}$$

onde $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k$ corresponde aos dados experimentais no instante k, L é o número inicial de agrupamentos, tal que $1 < L < N$, $\widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k)$ é o grau de pertinência intervalar da amostra $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k$ no i-ésimo agrupamento e $\widetilde{m} = [\underline{m}\ ,\ \overline{m}]$ é o expoente de ponderação intervalar, tal que $\underline{m}$ e $\overline{m}$ correspondem, respectivamente, ao exponente de ponderação das funções de pertinência superior e inferior do conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar $\widetilde{W}^i$. As matrizes de covariância $\widetilde{\mathbf{F}}^i$ são calculadas para cada agrupamento, como segue:

$$\widetilde{\mathbf{F}}^i = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left(\widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k)^{(l-1)}\right)^{\widetilde{m}}\left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k-\widetilde{\mathbf{v}}^{i^{(l)}}\right)\left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k-\widetilde{\mathbf{v}}^{i^{(l)}}\right)^T}{\sum_{k=1}^{N}\left(\widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k)^{(l-1)}\right)^{\widetilde{m}}}, \quad 1\le i\le L, \quad 1\le k\le N \tag{15}$$

A partir das matrizes de covariância $\widetilde{\mathbf{F}}^i$, as distâncias $\widetilde{D}^i_{k\widetilde{\mathbf{F}}^i}$ são calculadas por:

$$\widetilde{D}^i_{k\widetilde{\mathbf{F}}^i} = \sqrt{\left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k-\widetilde{\mathbf{v}}^{i^{(l)}}\right)^T\left[\det\left(\widetilde{\mathbf{F}}^i\right)^{1/n}\left(\widetilde{\mathbf{F}}^i\right)^{-1}\right]\left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k-\widetilde{\mathbf{v}}^{i^{(l)}}\right)} \tag{16}$$

O termo $\left[\det\left(\widetilde{\mathbf{F}}^i\right)^{1/n}\left(\widetilde{\mathbf{F}}^i\right)^{-1}\right]$ na Equação (16) corresponde à matriz de norma induzida $\mathbf{A}^i|^{i=1,\ldots,L}$ relacionada a cada agrupamento, a qual permite adaptar o formato dos agrupamentos à estrutura topológica dos dados experimentais [18]. A matriz de partição $\widetilde{\mathbf{U}}^{(l)}$ é atualizada como segue:

Se $\widetilde{D}^i_{k\widetilde{\mathbf{F}}^i} > 0$ para $1\le i\le L$, $1\le k\le N$

$$\widetilde{\mu}^{i^{(l)}}_{\widetilde{W}^i}(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k) = \left[\underline{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k), \overline{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k)\right] \tag{17}$$

onde

$$\underline{\mu}^{i^{(l)}}_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k) = \min\left[\frac{1}{\sum_{j=1}^{L}\left(\underline{D}^i_{k\underline{\mathbf{F}}^i}/\underline{D}^i_{k\underline{\mathbf{F}}^i}\right)^{2/(\underline{m}-1)}}\ ,\ \frac{1}{\sum_{j=1}^{L}\left(\overline{D}^i_{k\overline{\mathbf{F}}^i}/\overline{D}^i_{k\overline{\mathbf{F}}^i}\right)^{2/(\overline{m}-1)}}\right] \tag{18}$$

$$\overline{\mu}^{i^{(l)}}_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k) = \max\left[\frac{1}{\sum_{j=1}^{L}\left(\underline{D}^i_{k\underline{\mathbf{F}}^i}/\underline{D}^i_{k\underline{\mathbf{F}}^i}\right)^{2/(\underline{m}-1)}}\ ,\ \frac{1}{\sum_{j=1}^{L}\left(\overline{D}^i_{k\overline{\mathbf{F}}^i}/\overline{D}^i_{k\overline{\mathbf{F}}^i}\right)^{2/(\overline{m}-1)}}\right] \tag{19}$$

caso contrário $\widetilde{\mu}^{i^{(l)}}_{\widetilde{W}^i}(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k) = [0,\ 0]$. Estas etapas são repetidas iterativamente para $l = 1, 2, \ldots,$ até que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\left\|\widetilde{\mathbf{U}}^{(l)} - \widetilde{\mathbf{U}}^{(l-1)}\right\| < \mathcal{E} \tag{20}$$

onde $\mathcal{E}$ é a tolerância para finalização do algoritmo.

2) Atualização Evolutiva da Proposição do Antecedente do Filtro de Kalman Fuzzy Tipo-2 Evolutivo: A partição do universo de discurso da variável linguística $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k$ é atualizada por uma formulação *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno (eTS), a qual é proposta neste artigo, a fim de adaptar a estrutura do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo à dinâmica inerente aos dados experimentais. O algoritmo é baseado na densidade $D_k(z_k^j)$ da amostra $\mathbf{z}_k$ dos dados experimentais, para a j-ésima dimensão, a qual é calculada por [19]:

$$D_k(z_k^j) = \frac{k-1}{(k-1)(\delta_k+1)+\sigma_k-2\rho_k} \tag{21}$$

onde

$$\delta_k = \sum_{j=1}^{o+1} \left(z_k^j\right)^2 \tag{22}$$

$$\sigma_k = \sigma_{k-1} + \sum_{j=1}^{o+1} \left(z_{k-1}^j\right)^2 \tag{23}$$

$$\rho_k = \sum_{j=1}^{o+1} z_k^j \alpha_k \tag{24}$$

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} + z_{k-1}^j \tag{25}$$

tal que $D_1(z_1^j) = 1$, $\alpha_1 = 0$ e $\sigma_1 = 0$. A densidade dos protótipos dos agrupamentos $D_k(z^{i*}), i = 1, \ldots, L$, é atualizada, de forma recursiva, como segue:

$$\begin{aligned} D_k(z^{i*}) &= (k-1)+(k-2)\left(\frac{1}{D_{k-1}(z^{i*})}-1\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{o+1}\left(z_k^j - z_{(k-1)}^j\right)^2 \end{aligned} \tag{26}$$

O mecanismo de adaptação é baseado na comparação entre a densidade de uma nova amostra a partir dos dados experimentais e a densidade de todos os protótipos dos agrupamentos existentes. Assim, a cada instante de tempo k, algumas condições são avaliadas para avaliar a qualidade do particionamento e, assim, adaptar a estrutura do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo de acordo com a variabilidade dos dados experimentais. Tais condições são descritas a seguir [20]:

- A **Condição A** seleciona uma amostra como novo protótipo de agrupamento, a qual é descrita por:

$$D_k(z_k^j) > \max_{i=1}^{L} D(z^{i*}) \text{ OU } D_k(z_k^j) < \min_{i=1}^{L} D(z^{i*}) \tag{27}$$

  Se a condição A é satisfeita, então um novo agrupamento é definido ($L \leftarrow L+1$; $z^{i*} \leftarrow z_k^j$; $D(z^{i*}) = D_k(z_k^j)$);

- A **Condição B** evita a redundância e sobreposição de regras *fuzzy*, a qual é descrita por:

$$\begin{aligned} &\text{SE } \widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}_k^i}(z_k^j) > e^{-1},\ i = 1,\ldots,L-1 \\ &\text{ENTÃO } L \leftarrow L-1 \end{aligned} \tag{28}$$

- A **Condição C** garante que a base de regras tenha apenas regras *fuzzy* com algum nível de contribuição, e elimina regras com baixo nível de utilidade U_k^i, a qual é calculada por:

$$U_k^i = \frac{\sum_{l=1}^{k} \widetilde{\mu}^{il}_{\widetilde{W}_k^i}(z_l^j)}{k - I^{i*}} \tag{29}$$

  onde I^{i*} é o instante de tempo em que a i-ésima regra *fuzzy* é criada. Portanto, a Condição C é dada por:

$$\text{SE } U_k^i < \eta,\ i = 1,\ldots,L, \quad \text{ENTÃO } L \leftarrow L-1 \tag{30}$$

  tal que $\eta = [0.01 \quad 0.3]$.

3) Estimação Inicial da Proposição do Consequente do Filtro de Kalman Fuzzy Tipo-2 Evolutivo: Para a estimação paramétrica inicial da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo foi utilizada uma formulação *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo OKID (*Observer/Kalman Filter Identification*) [21]. Este algoritmo é baseado nos valores de pertinência intervalares obtidos inicialmente pelo algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 Gustafson-Kessel, conforme descrito na Seção II-B1, e nas componentes espectrais não-observáveis extraídas dos dados experimentais. Seja o conjunto de dados experimentais $\mathbf{Z}$, tal que $\mathbf{Z}_k = [\mathbf{u}_k \quad \boldsymbol{\alpha}_k^*]^T$, onde $\boldsymbol{\alpha}_k^*$ corresponde às componentes espectrais mais significativas extraídas a partir dos dados experimentais, uma matriz de regressores $\boldsymbol{\Lambda}$ is calculada por:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_q & \mathbf{u}_{q+1} & \cdots & \mathbf{u}_{N_b-1} \\ \mathbf{Z}_{q-1} & \mathbf{Z}_q & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-2} \\ \mathbf{Z}_{q-2} & \mathbf{Z}_{q-1} & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_1 & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-q-1} \end{bmatrix}_{[(m+p)q+m]\times N_b} \tag{31}$$

onde q é o número de parâmetros Markov definidos pelo usuário. A partir da matriz de regressores dada na Equação 31, o vetor composto pelos parâmetros do observador Markov $\overline{\widetilde{\mathbf{Y}}}^i$ é obtido pela seguinte equação:

$$\widetilde{\hat{\mathbf{y}}}^T = \sum_{i=1}^{L} \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i \boldsymbol{\Lambda}^T \overline{\widetilde{\mathbf{Y}}}^{i^T} \tag{32}$$

onde

$$\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i = \begin{bmatrix} \widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_q) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{q+1}) & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{N-1}) \end{bmatrix} \tag{33}$$

é a matriz diagonal de ponderação da i-ésima regra *fuzzy* obtida a partir do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel e

$$\begin{aligned} \overline{\widetilde{\mathbf{Y}}}^i &= \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{D}}_k^i & \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \overline{\widetilde{\mathbf{B}}}_k^i & \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \overline{\widetilde{\mathbf{A}}}_k^i \overline{\widetilde{\mathbf{B}}}_k^i & \cdots & \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \overline{\widetilde{\mathbf{A}}}_k^{i^{(q-1)}} & \overline{\widetilde{\mathbf{B}}}_k^i \end{bmatrix} \\ \overline{\widetilde{\mathbf{Y}}}^i &= \begin{bmatrix} \overline{\widetilde{\mathbf{Y}}}_0^i & \overline{\widetilde{\mathbf{Y}}}_1^i & \overline{\widetilde{\mathbf{Y}}}_2^i & \cdots \overline{\widetilde{\mathbf{Y}}}_q^i \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{34}$$

é o vetor com os parâmetros de Markov do observador, e $\overline{\widetilde{\mathbf{A}}}_k^i = \left[\widetilde{\mathbf{A}}_k^i + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\mathbf{C}}_k^i\right]$ e $\overline{\widetilde{\mathbf{B}}}_k^i = \left[\widetilde{\mathbf{B}}_k^i + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\mathbf{D}}_k^i\ , -\widetilde{\mathbf{K}}_k^i\right]$ correspondem às matrizes de estados e entradas acopladas, uma vez que possuem informações do comportamento dinâmico inerente aos dados experimentais e do ganho de Kalman intervalar. Usando a abordagem local na Equação (32), tem-se:

$$\mathbf{\Lambda}\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^i\mathbf{y}^T = \mathbf{\Lambda}\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^i\mathbf{\Lambda}^T\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^{i^T} \tag{35}$$

onde $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \;\; \mathbf{y}_2 \;\; \ldots \;\; \mathbf{y}_N] \in \mathbb{R}^{p\times N}$ corresponde à janela inicial de dados experimentais reais. Considerando $\widetilde{\mathfrak{U}}^i = \mathbf{\Lambda}\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^i\mathbf{\Lambda}^T$ e $\widetilde{\aleph}^i = \mathbf{\Lambda}\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^i\mathbf{y}^T$, a Equação (35) é reescrita como segue:

$$\widetilde{\mathfrak{U}}^i\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^{i^T} = \widetilde{\aleph}^i \tag{36}$$

A Equação (36) é solucionada aplicando o método de fatoração QR no termo $\widetilde{\mathfrak{U}}^i$, resultado em [22]:

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^i\widetilde{\mathbf{R}}^i\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^{i^T} = \widetilde{\aleph}^i \tag{37}$$

onde $\widetilde{\mathbf{Q}}^i$ possui colunas ortonornais, isto é $\left(\widetilde{\mathbf{Q}}^i\right)^{-1} = \left(\widetilde{\mathbf{Q}}^i\right)^T$, e $\widetilde{\mathbf{R}}^i$ é triangular superior cujos elementos da diagonal principal são diferentes de zero. Os parâmetros de Markov do observador $\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^i$ são obtidos por substituição retroativa a partir da Equação (37), uma vez que a matriz $\widetilde{\mathbf{R}}^i$ é triangular superior. Assim, os parâmetros de Markov do ganho do observador e os parâmetros de Markov do sistema são extraídos de $\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^i$, como segue:

$$\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^i_0 = \widetilde{\mathbf{D}}^i_k \tag{38}$$

$$\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^i_j = \widetilde{\mathbf{C}}^i_k\widetilde{\overline{\mathbf{A}}}^{i(j-1)}\widetilde{\overline{\mathbf{B}}}^i_k \tag{39}$$

$$= \Big[\widetilde{\mathbf{C}}^i_k\left(\widetilde{\mathbf{A}}^i_k + \widetilde{\mathbf{K}}^i_k\widetilde{\mathbf{C}}^i_k\right)^{(j-1)}\left(\widetilde{\mathbf{B}}^i_k + \widetilde{\mathbf{K}}^i_k\widetilde{\mathbf{D}}^i_k\right), \quad -\widetilde{\mathbf{C}}^i_k\left(\widetilde{\mathbf{A}}^i_k + \widetilde{\mathbf{K}}^i_k\widetilde{\mathbf{C}}^i_k\right)^{(j-1)}\widetilde{\mathbf{K}}^i_k\Big] \tag{40}$$

$$= \left[\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^{i^{(1)}}_j, \;\; -\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^{i^{(2)}}_j\right], \quad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{41}$$

Os parâmetros de Markov do sistema $\widetilde{\mathbf{Y}}^i_j$ são usados para construir a matriz de Hankel $\widetilde{\mathbf{H}}^i(j-1) \in \mathbb{R}^{\gamma p\times\beta m}$, como segue:

$$\widetilde{\mathbf{H}}^i(j-1) = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{Y}}^i_j & \widetilde{\mathbf{Y}}^i_{j+1} & \cdots & \widetilde{\mathbf{Y}}^i_{j+\beta-1} \\ \widetilde{\mathbf{Y}}^i_{j+1} & \widetilde{\mathbf{Y}}^i_{j+2} & \cdots & \widetilde{\mathbf{Y}}^i_{j+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{\mathbf{Y}}^i_{j+\gamma-1} & \widetilde{\mathbf{Y}}^i_{j+\gamma} & \cdots & \widetilde{\mathbf{Y}}^i_{j+\gamma+\beta-2} \end{bmatrix} \tag{42}$$

onde γ e β são inteiros definidos pelo usuário. Considerando $j = 1$ e aplicando o procedimento de Decomposição em Valores Singulares em $\widetilde{\mathbf{H}}^i(0)$, tem-se:

$$\widetilde{\mathbf{H}}^i(0) = \widetilde{\mathbf{\Xi}}^i\widetilde{\mathbf{\Sigma}}^i\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{i^T} \tag{43}$$

onde $\widetilde{\mathbf{\Xi}}^i \in \mathbb{R}^{\gamma p\times\gamma p}$ e $\widetilde{\mathbf{\Psi}}^i \in \mathbb{R}^{\beta m\times\beta m}$ são matrizes ortogonais e $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}^i \in \mathbb{R}^{\gamma p\times\beta m}$ é composta por n valores singulares significativos, o que corresponde a ordem mínima do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo.

A matriz de observabilidade $\widetilde{\mathbf{P}}^i_\gamma$ e a matriz de controlabilidade $\widetilde{\mathbf{Q}}^i_\beta$ são calculadas, como segue:

$$\widetilde{\mathbf{P}}^i_\gamma = \widetilde{\mathbf{\Xi}}^i_n\left(\widetilde{\mathbf{\Sigma}}^i_n\right)^{1/2} \tag{44}$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^i_\beta = \left(\widetilde{\mathbf{\Sigma}}^i_n\right)^{1/2}\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{i^T}_n \tag{45}$$

onde

$$\widetilde{\mathbf{P}}^i_\gamma = \left[\widetilde{\mathbf{C}}^i_k \;\; \widetilde{\mathbf{C}}^i_k\widetilde{\mathbf{A}}^i_k \;\; \widetilde{\mathbf{C}}^i_k\widetilde{\mathbf{A}}^{i^2}_k \;\; \cdots \;\; \widetilde{\mathbf{C}}^i_k\widetilde{\mathbf{A}}^{i^{\gamma-1}}_k\right]^T \tag{46}$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^i_\beta = \left[\widetilde{\mathbf{B}}^i_k \quad \widetilde{\mathbf{A}}^i_k\widetilde{\mathbf{B}}^i_k \quad \widetilde{\mathbf{A}}^{i^2}_k\widetilde{\mathbf{B}}^i_k \;\; \cdots \;\; \widetilde{\mathbf{A}}^{i^{\beta-1}}_k\widetilde{\mathbf{B}}^i_k\right] \tag{47}$$

Por fim, as matrizes definidas na proposiçaõ do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo são dadas por:

$$\widetilde{\mathbf{A}}^i_k = \left(\widetilde{\mathbf{\Sigma}}^i_n\right)^{-1/2}\widetilde{\mathbf{\Xi}}^{i^T}_n\widetilde{\mathbf{H}}^i_n(1)\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{i^T}_n\left(\widetilde{\mathbf{\Sigma}}^i_n\right)^{-1/2} \tag{48}$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^i_k = \text{primeiras } m \text{ colunas de } \widetilde{\mathbf{Q}}^i_\beta \tag{49}$$

$$\widetilde{\mathbf{C}}^i_k = \text{primeiras } p \text{ linhas de } \widetilde{\mathbf{P}}^i_\gamma \tag{50}$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}^i_k = \widetilde{\mathbf{Y}}^i_0 \tag{51}$$

A matriz de ganho de Kalman intervalar $\widetilde{\mathbf{K}}^i_k$, na i-ésima regra, é dada por:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}^{i^o}_j = -\widetilde{\mathbf{P}}^i_\gamma\widetilde{\mathbf{K}}^i_k \tag{52}$$

onde $\widetilde{\mathbf{K}}^i_k$ é a matriz de ganho de Kalman intervalar. Usando a abordagem local na Equação (52), tem-se:

$$\widetilde{\mathbf{P}}^{i^T}_\gamma\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^i\widetilde{\mathbf{Y}}^{i^o}_j = -\widetilde{\mathbf{P}}^{i^T}_\gamma\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^i\widetilde{\mathbf{P}}^i_\gamma\widetilde{\mathbf{K}}^i_k \tag{53}$$

A matriz de ganho de Kalman intervalar $\widetilde{\mathbf{K}}^i_k$ é obtida usando fatoração QR no lado direito de Equação (53).

4) Atualização Recursiva da Proposição do Consequente do Filtro de Kalman Fuzzy Tipo-2 Evolutivo: Após a estimação inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, os filtros de Kalman, definidos na proposição do consequente do sistema de inferência, são atualizados recursivamente nos instantes de tempo $k = N+1, k = N+2, \ldots$, a cada nova amostra do conjunto de dados experimentais. Considerando o vetor de regressores, no instante k, dado por:

$$\boldsymbol{\lambda}_k = [\mathbf{u}_{k+1} \;\; \mathbf{Z}_k \;\; \mathbf{Z}_{k-1} \;\; \cdots \;\; \mathbf{Z}_{k-q}]^T \tag{54}$$

os parâmetros de Markov do observador intervalares $\widetilde{\overline{\mathbf{Y}}}^i_k$ são obtidos pela atualização recursiva de (36), como segue:

$$\widetilde{\mathfrak{U}}^i_k = \widetilde{\mathfrak{U}}^i_{k-1} + \widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k)\boldsymbol{\lambda}_k\boldsymbol{\lambda}^T_k \tag{55}$$

$$\widetilde{\aleph}^i_k = \widetilde{\aleph}^i_{k-1} + \widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k)\boldsymbol{\lambda}_k\mathbf{y}^T_k \tag{56}$$

Uma vez que $\widetilde{\mathfrak{U}}^i_k$ e $\widetilde{\aleph}^i_k$ foram atualizados e aplicando-se fatoração QR em $\widetilde{\mathfrak{U}}^i_k$, os parâmetros de Markov do observador

$\widetilde{\mathbf{Y}}_k^i$ são atualizados e a proposição do consequente é atualizada executando-se as Equações (37)-(51). De forma similar, a matriz de ganho de Kalman intervalar $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i$ é obtida pela atualização recursiva da Equação (52), como segue:

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_k^i = \widetilde{\mathfrak{A}}_{k-1}^i + \widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k)\boldsymbol{\lambda}_k\boldsymbol{\lambda}_k^T \tag{57}$$

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_k^i = \widetilde{\mathfrak{N}}_{k-1}^i + \widetilde{\mu}^i_{\widetilde{W}^i}(\mathbf{Z}_k)\boldsymbol{\lambda}_k\boldsymbol{\lambda}_k^T \tag{58}$$

Uma vez que $\widetilde{\mathfrak{A}}_k^i$ e $\widetilde{\mathfrak{N}}_k^i$ foram atualizados e aplicando-se o método de fatoração QR em $\widetilde{\mathfrak{A}}_k^i$, a matriz de ganho de Kalman *fuzzy* intervalar é atualizada a cada instante de tempo k. No sentido de ilustrar as etapas sequenciais dos aspectos computacionais para o projeto do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, para melhor compreensão dos leitores, um fluxograma da metodologia proposta é mostrado na Figura 1.

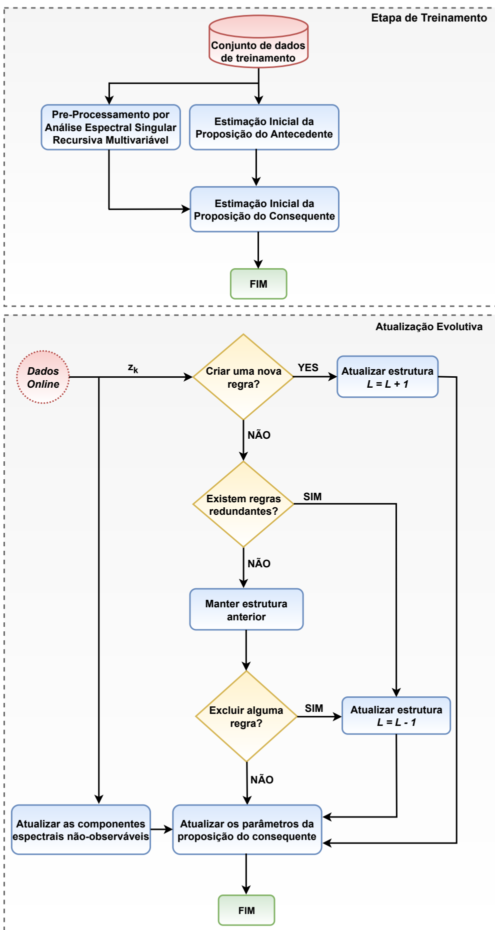

Fig. 1. Fluxograma da metodologia proposta correspondente aos aspectos computacionais para projeto do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo.

III. Resultados Experimentais

O filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo proposto neste artigo foi aplicado ao problema de rastreamento de um helicóptero 2DoF, o qual é mostrado na Figura 2. O helicóptero 2DoF é um sistema dinâmico MIMO (*Multiple Input and Multiple Output*) com duas variáveis de entrada (tensão de controle do ângulo de elevação $u_\theta \in [-15\text{V}, +15\text{V}]$ e tensão de controle do ângulo de azimute $u_\vartheta \in [-24\text{V}, +24\text{V}]$) e duas variáveis de saída (ângulo de elevação $y_\theta \in [-360°, +360°]$ e ângulo de azimute $y_\vartheta \in [-40°, +40°]$). Os dados experimentais, com comprimento total de 751 amostras, relacionados às variáveis de entrada u_θ e u_ϑ e às variáveis de saída y_θ e y_ϑ do helicóptero 2DoF, são mostradas nas Figuras 3-4, respectivamente. Considerando as primeiras 300 amostras

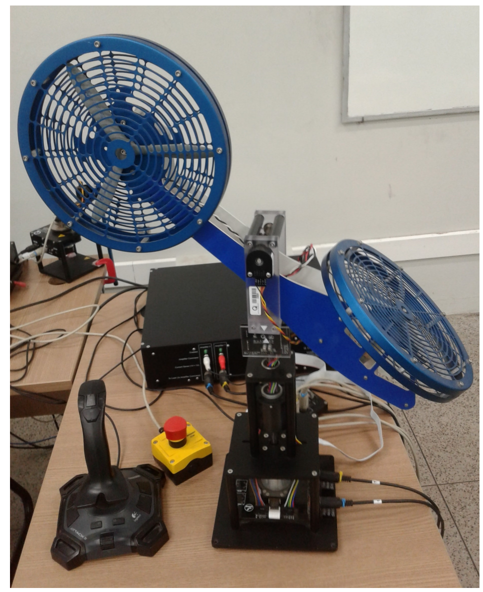

Fig. 2. Helicóptero 2DoF.

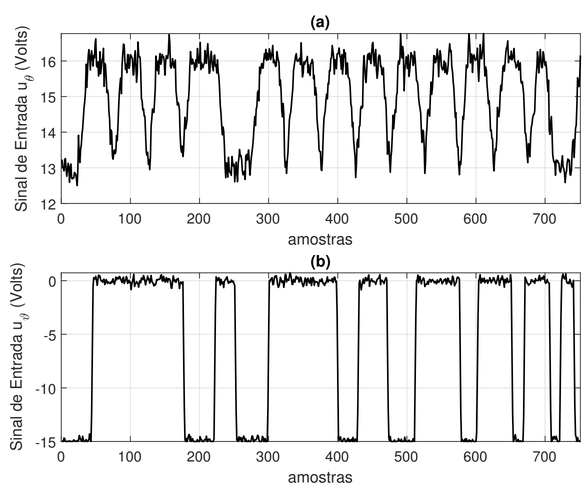

Fig. 3. Variáveis de entrada so helicóptero 2DoF: (a) Tensão de controle do ângulo de elevação u_θ, (b) Tensão de controle do ângulo de azimute u_ϑ.

dos dados experimentais de entrada e saída do helicóptero 2DoF, o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo foi inicialmente estimado, considerando $\mathcal{Z} = [y_\theta \;\; y_\vartheta]^T$ na Equação (13). A análise espectral singular recursiva multivariável foi capaz de obter as componentes espectrais relacionados aos

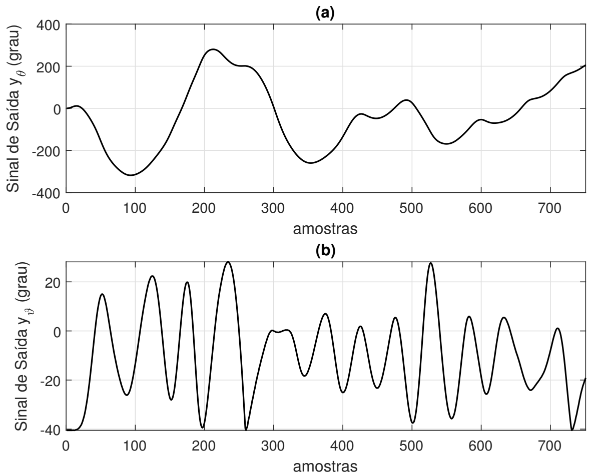

Fig. 4. Variáveis de saída do helicóptero 2DoF: (a) Ângulo de elevação y_θ, (b) Ângulo de azimute y_ϑ.

dados experimentais de entrada e saída do helicóptero 2DoF. O número de componentes espectrais não-observáveis foi definido de acordo com a métrica VAF (*Variance Accounted For*), dentro de um intervalo de 2 a 10 componentes. O número adequado de componentes espectrais não-observáveis foi de ξ = 2 para implementação da metodologia proposta, com valor de VAF de 99,99% de eficiência para representação dos dados experimentais.

A partição inicial do universo de discurso de $\mathcal{Z}$ foi realizada pela formulação *fuzzy* tipo-2 do algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel, conforme descrito na Seção II-B1, durante a etapa de treinamento, considerando o seguintes parâmetros: $L = 3$, expoente de ponderação $\widetilde{m} = [1.7 \quad 2.2]$ e $\mathcal{E} = 10^{-4}$. O algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar foi utilizado para obter a estimação inicial da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, conforme descrito na Seção II-B3, considerando os seguintes parâmetros: número de parâmetros de Markov $q = 1$ e dimensões da matriz de Hankel $\gamma = 30$ e $\beta = 30$.

A partir da amostra 301, as partições de $\mathcal{Z}$ relacionadas às variáveis de saída do helicóptero 2DoF foram atualizadas pela formulação *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno, conforme descrito na Seção II-B2, de modo que a proposição do antecedente e o número de regras *fuzzy* puderam ser estimadas a cada instante de tempo k durante a etapa de atualização recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo. Para a implementação do algoritmo de agrupamento *evolving* Takagi-Sugeno tipo-2, o valor de $\eta = 0,01$ (Condição C) foi adotado. O algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar foi implementado para atualização recursiva da proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, conforme a Equação (13), considerando como critério de ponderação as partições atualizadas dos dados experimentais, bem como as componentes espectrais não-observáveis. A região de confiança, conforme mostrado nas Figuras 5-6, durante a etapa recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, ilustra a eficiência da metodologia proposta para o rastreamento do dos dados experimentais do ângulo de elevação y_θ e do ângulo de azimute y_ϑ do helicóptero 2DoF. O

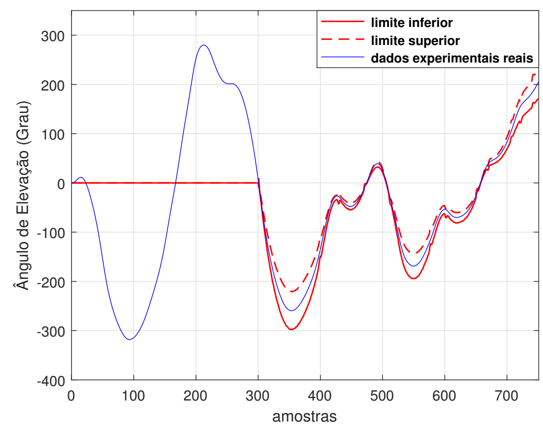

Fig. 5. Região de confiança para o rastreamento dos dados experimentais do ângulo de elevação y_θ do helicóptero 2DoF, obtida durante a etapa recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo.

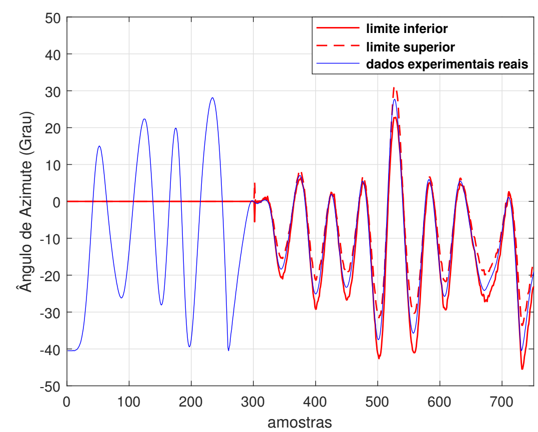

Fig. 6. Região de confiança para o rastreamento dos dados experimentais do ângulo de azimute y_ϑ do helicóptero 2DoF, obtida durante a etapa recursiva do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo.

número regras *fuzzy* variante no tempo do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, de acordo com as flutuações dinâmicas dos dados experimentais do helicóptero 2DoF, é ilustrado na Fig. 7.

A fim de avaliar a eficiência da metodologia proposta neste artigo, foi realizada uma análise comparativa com a abordagem em [23], considerando a métrica *Variance Accounted For* (VAF %), a qual é dada por:

$$VAF\ (\%) = \left[1 - \frac{var(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}{var(\mathbf{y})}\right] \times 100 \qquad (59)$$

onde $\hat{\mathbf{y}}$ corresponde ao valor estimado do valor real $\mathbf{y}$ e $var(\bullet)$ é a variância do sinal. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo, comparada com a abordagem em [23],

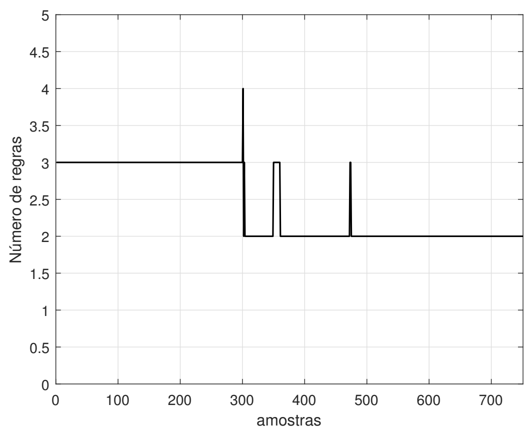

Fig. 7. Variação do número de regras *fuzzy* do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo para o rastreamento dinâmico do helicóptero 2DoF.

TABLE I
ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE A METODOLOGIA PROPOSTA E A ABORDAGEM EM [23] PARA RASTREAMENTO DO HELICÓPTERO 2DOF.

	Saída	Metodologia Proposta	[23]	[24]
VAF (%)	Elevação θ	99.9874	97.17	-
	Azimute ϑ	99.5963	98.06	-
RMSE (%)	Elevação θ	0.00156	-	0.0067
	Azimute ϑ	0.00762	-	0.0136

é apresentada na Tabela I. A partir da análise comparativa percebe-se o melhor desempenho da metodologia proposta, uma vez que esta possibilita a adaptação da estrutura do modelo do filtro de Kalman conforme a dinâmica descrita pelos dados experimentais.

IV. CONCLUSÕES

Neste artigo, uma abordagem para o projeto de filtros de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivos, baseada na decomposição espectral de dados experimentais, foi apresentada. A metodologia adotada permite atualizar de forma evolutiva os parâmetros do modelo do filtro em tempo real de modo a adaptá-lo às alterações dinâmicas apresentadas pelo conjunto de dados, bem como permite o processamento das incertezas inerentes às regiões de operação intervalares, estabelecendo uma região de confiança de possíveis soluções como saída do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 evolutivo. A eficiência da metodologia proposta foi ilustrada a partir do rastreamento intervalar de um helicóptero 2DoF. O escopo futuro deste trabalho está relacionado à implementação da metodologia proposta com a ordem do modelo no espaço de estados variante no tempo usando estratégias de processamento paralelo, a fim de minimizar o custo computacional do algoritmo e, assim, garantir alta velocidade de processamento.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão (PPGEE/UFMA) pelo suporte ao desenvolvimento desta pesquisa.

REFERENCES

[1] J. Rabcan, V. Levashenko, E. Zaitseva, and M. Kvassay, "EEG signal classification based on fuzzy classifiers," *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 18, no. 2, pp. 757–766, feb 2022.

[2] D. C. dos Santos Gomes and G. L. de Oliveira Serra, "Machine learning model for computational tracking and forecasting the COVID-19 dynamic propagation," *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, vol. 25, no. 3, pp. 615–622, mar 2021.

[3] Y. Guo, L. Jiao, R. Qu, Z. Sun, S. Wang, S. Wang, and F. Liu, "Adaptive fuzzy learning superpixel representation for PolSAR image classification," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 60, pp. 1–18, 2022.

[4] L. Song, X. Liu, S. Chen, S. Liu, X. Liu, K. Muhammad, and S. Bhattacharyya, "A deep fuzzy model for diagnosis of COVID-19 from CT images," *Applied Soft Computing*, vol. 122, p. 108883, jun 2022.

[5] Z. You, H. Yan, H. Zhang, S. Chen, and M. Wang, "Fuzzy-dependent-switching control of nonlinear systems with aperiodic sampling," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 29, no. 11, pp. 3349–3359, nov 2021.

[6] H. Zarei, A. Khastan, and R. Rodríguez-López, "Suboptimal control of linear fuzzy systems," *Fuzzy Sets and Systems*, may 2022.

[7] H. H. Y. Saad, N. A. M. Isa, and M. M. Ahmed, "A structural evolving approach for fuzzy systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 28, no. 2, pp. 273–287, feb 2020.

[8] G. L. O. Serra, Ed., *Frontiers in Advanced Control Systems*. InTech, jul 2012.

[9] C. Y. Teh, Y. W. Kerk, K. M. Tay, and C. P. Lim, "On modelling of data-driven monotone zero-order TSK fuzzy inference systems using a system identification framework," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, pp. 1–1, 2018.

[10] W.-C. Su, C.-F. Juang, and C.-M. Hsu, "Multiobjective evolutionary interpretable type-2 fuzzy systems with structure and parameter learning for hexapod robot control," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 52, no. 5, pp. 3066–3078, may 2022.

[11] C. Chen, J. Huang, D. Wu, and X. Tu, "Interval type-2 fuzzy disturbance observer-based t–s fuzzy control for a pneumatic flexible joint," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 69, no. 6, pp. 5962–5972, jun 2022.

[12] O. Baskov, "Dual type-2 fuzzy cones and their application in multicriteria choice," *Fuzzy Sets and Systems*, feb 2022.

[13] F. Cady, *The Data Science Handbook*. Wiley, Feb. 2017.

[14] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, mar 1960.

[15] G. L. O. Serra, Ed., *Kalman Filters - Theory for Advanced Applications*. InTech, feb 2018.

[16] D. C. dos Santos Gomes, "Metodologia para filtragem de kalman fuzzy tipo-2 intervalar baseada em modelagem computacional das componentes espectrais não-observáveis de dados experimentais." Universidade Federal do Maranhão, Tech. Rep., 2021.

[17] N. Golyandina and A. Zhigljavsky, *Singular Spectrum Analysis for Time Series*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[18] R. Babuska, *Fuzzy Modeling for Control*. Springer, 1998.

[19] P. Agelov, D. P. Filev, and N. Kasabov, *Evolving Intelligent Systems: Methodology and Applications*. IEEE COMPUTER SOC PR, 2010.

[20] P. Angelov, *Autonomous Learning Systems: From Data Streams to Knowledge in Real-Time*. Wiley, 2013.

[21] J. N. Juang, *Applied System Identification*. Prentice Hall, 1994.

[22] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 1999.

[23] L. M. M. Torres and G. Serra, "State-space recursive fuzzy modeling approach based on evolving data clustering," *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, vol. 29, no. 4, pp. 426–440, jun 2018.

[24] M. C. Maya-Rodriguez, M. A. Lopez-Pacheco, Y. Lozano-Hernandez, V. G. Sanchez-Meza, L. A. Cantera-Cantera, and R. Tolentino-Eslava, "Integration of CNN in a dynamic model-based controller for control of a 2dof helicopter with tail rotor perturbations," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 73 474–73 483, 2022.