LINEARIZAÇÃO DE SENSORES DE TEMPERATURA COM TREINAMENTO MULTIOBJETIVO DE REDES DE FUNÇÕES DE BASE RADIAIS

Sílvia Grasiella Moreira Almeida*, Frederico Gadelha Guimarães † , Jaime Arturo Ramirez ‡

* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFMG, MG, Brasil Instituto Federal de Minas Gerais, IFMG, Ouro Preto, MG, Brasil

†Departamento de Computação Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil

[‡]Departamento de Engenharia Elétrica Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil

Emails: sgrasiella@yahoo.com.br, frederico.g.guimaraes@gmail.com, jramirez@ufmg.br

Abstract— In this paper, we present the employment of radial basis function neural networks for the linearization of the input-output relationship of a temperature sensor (thermocouple), trained with multiobjective learning. The network weights are determined by using the multiobjective least squares method. By varying the width of the radial basis functions, different Pareto sets are obtained. We propose a decision-making strategy over the nondominated set based on linear regression, in order to choose the network with the best structure for the problem. The advantage of multiobjective learning in the context of sensor linearization is providing an adequate network for the problem that also presents low structural complexity, thus reducing the hardware implementation cost.

Keywords— Radial basis functions, multi-objective learning, sensor linearization, intelligent sensors, thermocouple.

Resumo— Neste artigo, apresentamos a utilização de redes neurais artificiais de funções de base radiais para a linearização da relação entrada e saída de um sensor de temperatura (termopar), usando treinamento multiobjetivo. Os pesos da rede são determinados por meio da técnica de mínimos quadrados multiobjetivo. Variando-se a largura das funções de base, diferentes conjuntos de soluções de Pareto são obtidos. Nós propomos uma estratégia de decisão sobre o conjunto não dominado baseada em regressão linear para selecionar a rede com a estrutura mais adequada para o problema. A vantagem do treinamento multiobjetivo no contexto de linearização de sensores é determinar uma rede adequada para o problema e que apresente baixa complexidade estrutural, assim reduzindo o custo de implementação em hardware.

Keywords— Redes de funções de base radiais, treinamento multiobjetivo, linearização de sensores, sensores inteligentes, termopar.

1 Introdução

Em um ambiente industrial, diversas operações ou sequências de operações envolvendo uma mudança de estado, de composição ou outras propriedades de um sistema devem ser realizadas com o objetivo de geração de um produto. Variáveis que são constantemente monitoradas neste ambiente são a vazão, a viscosidade, a umidade, a pressão, o nível, o pH, a densidade, a temperatura dos processos, dentre outras, com o objetivo de monitorar e controlar processos. Para que este controle e monitoramento seja realizado de forma ótima, é de fundamental importância o conhecimento do comportamento dos sensores utilizados para medição destas variáveis. Cada sensor possui valores característicos para uma grande variedade de parâmetros, sejam eles: precisão, resolução, especificidade, linearidade, histerese. Deseja-se, assim, na grande maioria dos processos, que o comportamento dos medidores apresente linearidade entre seu sinal de entrada e saída. O problema é que grande parte dos princípios físicos utilizados para medição não possuem esta relação linear. Além disso, os sinais produzidos pelos sensores estão, na maior parte das situações, submetidos a condições de operação variáveis, degradação de componentes e ruídos de medição.

Assim, é comum o sensor, quando em operação, além da não-linearidade advinda do princípio físico, ter seu alcance e faixa de trabalho diminuídos, o que exige constante ajuste da relação de entrada e saída deste ao processo.Desta forma, para verificação da linearidade do sensor, a calibração necessita ser realizada constantemente. Baseado na calibração realizada os ajustes de zero e span desejados na curva linear são, então, realizados. Conforme definido pela International Standards Organization (ISO), ver (INMETRO, 2005), a calibração é definida como:

... o conjunto de operações que estabelece, sob condições especificadas, a relação entre os valores indicados por um instrumento de medição ou sistema de medição ou valores representados por uma medida materializada ou um mate-

rial de referência, e os valores correspondentes das grandezas estabelecidos por padrões.

Diversos trabalhos têm sido propostos para otimizar a relação entrada e saída de sensores, tornando a linearização dessa relação menos sensível a ruídos. Por exemplo, Klopfenstein (1994) discute a linearização de sensores em software usando técnicas clássicas como interpolação polinomial. Contudo, encontrar um polinômio interpolador que possa ser generalizado para diversas relações de entrada e saída de sensores não é tarefa trivial. Além dos problemas de oscilação numérica presentes devido ao aumento do grau do polinômio interpolador, na maioria das vezes o ajuste por esta técnica deve ser realizado para partes específicas da faixa de medição. Além do mais, o aumento do grau do polinômio interpolador não garante aumento de precisão. Em Pereira et al. (2001), os autores avaliam métodos de interpolação polinomial e redes neurais artificiais (RNAs) para dados experimentais de medição, mostrando que aproximações por RNAs são mais precisas e menos sensíveis a ruído.

Dessa forma, muitos trabalhos surgiram investigando a utilização de RNAs na linearização e calibração automática de sensores, uma associação denominada por alguns autores de sensores inteligentes, embora esse termo seja abrangente e difícil de definir (Reznik, 1998). Dempsey et al. (1997) apresentam talvez um dos primeiros trabalhos integrando RNAs e sensores, inclusive extendendo a faixa de operação linear do sensor. Weremczuk (1997) utiliza algoritmos genéticos para ajustar os pontos de calibração de um sensor com relação às condições de ambiente. Mais recentemente (Patra et al., 2004; Patra et al., 2008), verificamse propostas de implementações em hardware de RNAs do tipo Perceptron de múltiplas camadas para compensação e linearização de sensores. Patra et al. (2007) apresentam uma implementação num chip FPGA (Field Programmable Gate Array) de uma rede de funções de base radiais (RFBRs) para compensação de sensores de pressão. Chatterjee et al. (2000) também utilizam uma RFBR para linearizar a característica estática de sensores de humidade capacitivos. Em Medrano-Marques and del Brio (2000), os autores utilizam a diferença entre a saída não-linear do sensor e a resposta linear desejada como a função a ser aproximada pela rede, no caso uma RNA do tipo Perceptron de múltiplas camadas.

Este artigo propõe um sistema que realize a linearização entre sinal de entrada e saída de um sensor de temperatura, cuja relação é não-linear, utilizando redes neurais artificiais de funções de base radiais, com treinamento multiobjetivo. A abor-

dagem multiobjetivo para o treinamento de RNAs é apresentada e discutida em (Teixeira et al., 2000a; Teixeira et al., 2000b; Braga et al., 2006; Jin and Sendhoff, 2008).

Os trabalhos de linearização de sensores disponíveis na literatura utilizam técnicas tradicionais de treinamento, e portanto necessitam de uma fase inicial de ajuste da topologia da rede. Utilizando treinamento multiobjetivo, a rede com a estrutura mais adequada para o problema é selecionada a partir de uma estratégia de decisão sobre o conjunto Pareto baseada em regressão linear, e proposta neste trabalho. Na etapa de ajuste dos pesos, observa-se que ambas as funções objetivo do problema de treinamento são convexas e, portanto, uma solução de Pareto pode ser encontrada rapidamente usando o método de Mínimos Quadrados Multiobjetivo. A vantagem do treinamento multiobjetivo no contexto de linearização de sensores é determinar uma rede adequada para o problema que apresente baixa complexidade estrutural, assim reduzindo o custo de implementação em hardware.

2 Medição de temperatura com termopares

O objeto de estudo deste artigo é o sensor conhecido como termopar, utilizado em medição de temperatura. Seu funcionamento é baseado em princípios físicos que demonstram a geração de força eletromotriz (fem) a partir da submissão de uma junção de materiais constituídos de diferentes ligas metálicas a gradientes de temperatura distintos. Esses princípios físicos são especificamente os efeitos Seebeck, Peltier, e Thomson, ver (Bajzek, 2005).

O efeito Seebeck acontece quando um circuito, composto de dois metais distintos e mantendo suas junções a temperaturas diferentes, gera uma força eletromotriz, de acordo com a equação:

$$S_{AB} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta \epsilon_{AB}}{\Delta T} = \frac{d\epsilon_{AB}}{dT} \tag{1}$$

em que ϵ_{AB} é a tensão Seebeck, T é a temperatura e S_{AB} é o coeficiente Seebeck.

O efeito Peltier, descrito pela equação (2), mede a mudança na quantidade de calor quando 1 Coloumb de carga atravessa uma junção formada por metais distintos:

$$\Phi_{AB}I = \frac{dQ}{dt} \tag{2}$$

onde Φ é o coeficiente de Peltier para os dois materiais, I é a corrente elétrica e dQ/dt é a taxa de mudança em calor.

O efeito Thomson descreve o comportamento de materiais condutores que, quando submetidos à corrente elétrica e a gradientes de temperatura em suas extremidades pode emitir ou absorver calor, dependendo apenas desta diferença e da intensidade e direção da corrente elétrica. Assim, o efeito Thomson está presente na equação que define o calor produzido por unidade de volume:

$$Thomson_{emf} = \int_{Tr}^{T} \sigma_A dT \tag{3}$$

onde σ_A é o coeficiente de Thomson para o material A, dT é o gradiente de temperatura, T é a temperatura a ser medida na junta quente e T_r é a temperatura de referência.

A tensão Seebeck é o resultado da soma das tensões Peltier e Thomson, levando à equação fundamental dos termopares:

$$\epsilon_{AB} = (\Phi_{AB})_T - (\Phi_{AB})_{Tr} + \int_{Tr}^T (\sigma_A - \sigma_B) dT \quad (4)$$

Por serem constituídos de diferentes ligas metálicas, existem termopares de diversos tipos, que podem ser utilizados para medições de temperatura entre -270° e 1820° Celsius. Como consequência desta diversidade, não há um modelo matemático genérico que atenda a todos os tipos de termopares, pois a relação fem versus temperatura é não linear e única para cada um dos sensores existentes.

Na maior parte dos equipamentos industriais utilizados para medir temperatura, tabelas estabelecidas empiricamente e já linearizadas pela ITS-90 (NIST, 1995) são implementadas em memória eletrônica. Outro procedimento também deve ser realizado quando da medição da temperatura por meio de termopares, que é a compensação da junta fria, ver (NIST, 1995).

3 Redes de Funções de Base Radiais

No contexto de uma rede neural de funções de base radiais (RFBR), as unidades ocultas fornecem um conjunto de funções que constituem uma base arbitrária para os padrões de entrada, quando estes são expandidos sobre o espaço oculto: estas são as funções de base radiais. A construção de uma RFBR envolve duas camadas distintas e os dados de entrada. A primeira camada da rede, conectada aos dados de entrada e única camada oculta da rede, aplica uma transformação não-linear do espaço de entrada para o espaço oculto. Em geral este espaço é de alta dimensionalidade. A camada de saída é linear, fornecendo a resposta da rede ao padrão de entrada fornecido a esta.

As funções de base radiais são funções não-lineares e seus valores crescem ou decrescem monotonicamente à medida que a distância a um ponto central aumenta. Este ponto é denominado o centro da função de base radial. A função de aproximação da rede é representada por:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} w_i \theta_i (\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})$$
 (5)

em que θ_i são as funções de base radiais cujos centros são \mathbf{c}_i e \mathbf{w} é o vetor de pesos.

Com os parâmetros das funções de base (centros e larguras) definidos, o problema de construção da função \hat{f} consistirá, então, na determinação dos pesos w_i . A partir dos dados de treinamento, podemos construir o sistema de equações:

$$\mathbf{\Theta}\mathbf{w} = \mathbf{t} \tag{6}$$

em que Θ é a matriz com os valores das funções de base e ${\bf t}$ são os valores de saída desejados. Se o número de pontos é igual a m e Θ for não singular, pode-se resolver o sistema simétrico assim obtido e encontrar ${\bf w}$. Se houver mais pontos do que funções de base, então o sistema é sobredeterminado, e pode-se encontrar uma solução de mínimos quadrados. Funções de base radiais que garantem a não singularidade da matriz de interpolação, de acordo com o $Teorema\ de\ Michelli$, são as funções Gaussiana, Multiquádrica e Multiquádrica Inversa (Haykin, 1998), e por essa razão são mais comumente usadas.

3.1 Treinamento Semi-Supervisionado

O treinamento de uma RFBR consiste no processo pelo qual seus parâmetros serão ajustados de forma a reproduzir a função original. O objetivo não é apenas armazenar uma estrutura de dados conhecida, mas sim criar um mapeamento suave que seja capaz de realizar interpolação coerentemente em regiões onde não existam dados.

Assim, o projeto da RFBR consiste em minimizar a função de custo erro de treinamento, a média da soma dos erros quadráticos (MSE¹):

$$\xi_{MSE}(\{\mathbf{c}_i\}, \mathbf{s}, \mathbf{w}) = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{p} \left[t_n - \hat{f}(\mathbf{x}_n) \right]^2$$
 (7)

onde $\{\mathbf{c}_i\}$ são os centros das funções de base, \mathbf{s} é o vetor com as larguras das funções de base, e $p \geq m$ é o número de pontos do conjunto de treinamento.

No treinamento supervisionado da RFBR, se os centros e larguras das funções de base radiais não são fixados, o problema do treinamento torna-se

¹Mean Squared Error

um problema de otimização não-linear. O treinamento supervisionado possui algumas desvantagens. Uma delas é que trata-se de um método de otimização não-linear computacionalmente caro, cuja convergência pode ser muito lenta (da Motta Salles Barreto, 2003). A segunda desvantagem é que não há nenhuma imposição quanto à estrutura da rede e os centros podem assumir valores próximos, perdendo-se assim a propriedade de localidade destas redes.

Assim, pode-se realizar o treinamento de forma semi-supervisionada. O treinamento semi-supervisionado consiste em duas etapas: na primeira, a escolha dos centros e larguras das funções de base radiais é realizada de forma não-supervisionada. Na segunda etapa, com estes parâmetros da rede fixados, encontram-se os valores dos pesos w_i realizando o treinamento da RFBR como uma rede linear.

A escolha dos parâmetros da rede neste trabalho deu-se da seguinte forma: as médias foram geradas aleatoriamente a partir de uma distribuição uniforme e a rede foi treinada para valores de desvio padrão distintos, mas mantidos fixos para o treinamento corrente.

3.2 Treinamento Multiobjetivo

Os pesos que serão ajustados pela RBRF são números reais e a representação destes em hardware é realizada em forma de ponto flutuante. Esta representação é feita no formato número x base expoente. Dois parâmetros são variados nesta representação: a posição da vírgula e a potência à qual elevamos a base.

Quanto menor o valor encontrado para os pesos, mais espaço na memória do hardware será necessário para armazenar o valor do expoente deste peso.

Os microcontroladores são projetados para realizar as operações artiméticas mais simples, sejam elas: adição e subtração. Portanto, não possuem grande espaço em memória para armazenamento de dados. Parte da memória é utilizada na gravação das instruções e não dos dados.

Desta forma, ao descartar-se os pesos de menor valor, tem-se um ganho relevante com relação à diminuição do custo da implementação em um microcontrolador, economizando espaço em memória.

Assim, neste artigo, foi utilizado para treinamento multiobjetivo, além do erro quadrático, a complexidade da rede. Esta última, representando a redução da memória a ser utilizada na implementação em hardware. Desta forma, configura-se uma

otimização multiobjetivo da forma:

$$\min \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{w}) & f_2(\mathbf{w}) \end{bmatrix}^T \tag{8}$$

com

$$f_1(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{t} - \mathbf{\Theta} \mathbf{w} \right]^T \left[\mathbf{t} - \mathbf{\Theta} \mathbf{w} \right]$$
 (9)

е

$$f_2(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} \tag{10}$$

Como ambas as funções a serem otimizadas são convexas, pode-se adotar sua combinação convexa para geração da solução Pareto-ótima:

$$\min \lambda f_1(\mathbf{w}) + (1 - \lambda)f_2(\mathbf{w}) \tag{11}$$

que possui solução de mínimos quadrados dada por:

$$\hat{\mathbf{w}} = \lambda \left[\mathbf{\Theta}^T \mathbf{\Theta} + (1 - \lambda) H \right]^{-1} \mathbf{\Theta}^T t \qquad (12)$$

3.3 O Critério de Decisão

Uma vez que o gráfico de Pareto esteja construído, o próximo passo é decidir sobre qual ponto atende de forma mais satisfatória aos dois objetivos. O critério de decisão proposto é baseado na simulação das redes do conjunto Pareto usando os dados de teste. Após simuladas as redes encontradas, fazse uma regressão linear da relação entrada e saída do sensor integrado com a rede neural, obtendo-se uma relação linear. A rede que obtiver um menor erro entre seu valor estimado e os valores de regressão ajustados será escolhida como a rede a ser implementada.

4 O Experimento Realizado

A partir dos dados de temperatura disponíveis no sítio Sensorland², foi ajustado um polinômio de 5a. ordem para simulação do comportamento do sensor, U=g(T), onde U é a tensão gerada pelo sensor ao medir a temperatura T. A função U(T) foi avaliada para valores de T entre 0 e $1700^{\circ}C$ e, desta forma, foram gerados 851 pontos. Os dados de U e T foram normalizados. Aos dados normalizados u, somou-se ruído Gaussiano de média zero e desvio padrão 5%.

A entrada da rede é composta pelos valores de u(t) com ruído. Os valores desejados são a temperatura normalizada t. Estes pontos foram utilizados para treinamento da rede. O número de neurônios estabelecido para o experimento foi de 300. O centro

²http://www.sensorland.com/HowPage017.html, endereço acessado em Março de 2009.

de cada neurônio foi escolhido aleatoriamente, a partir de uma distribuição uniforme.

Neste experimento, o valor do desvio padrão (largura da função de base) foi variado de forma linear entre 1 e 4. Assim, a rede foi treinada com centros e larguras fixos. Para cada valor de desvio padrão, foi gerado um conjunto Pareto por meio da equação (12), ver Fig. 1.

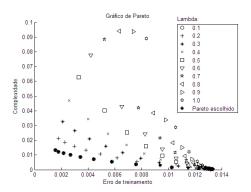


Figura 1: Gráficos de Pareto para diversos valores de desvio padrão.

A partir dos conjuntos calculados para cada valor de desvio padrão, foi estabelecido, por meio de um algoritmo de não dominância, o conjunto de pontos não dominados. O critério de decisão baseado em regressão linear foi aplicado ao conjunto usando dados de teste, obtendo uma rede com relação mostrada na Fig. 2.

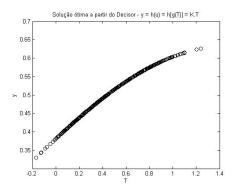


Figura 2: Saída da rede escolhida pelo decisor implementado.

5 Conclusões e Trabalhos Futuros

Este trabalho apresentou o processo de linearização de sensores de temperatura usando RFBR com treinamento multiobjetivo. Dessa forma, pode-se encontrar uma rede adequada para a linearização, que seja menos sensível a ruído e de baixa complexidade, de forma a reduzir seu custo de implementação em *hardware*.

Para a faixa de medição estabelecida neste experimento, o método polinomial é capaz de fornecer linearização adequada. A vantagem do uso da rede neural e consequente justificativa para o esforço computacional do treinamento desta encontra-se na capacidade de generalização da resposta da rede. Quaisquer sensores e quaisquer faixas de trabalho podem ter seus pesos ajustados por uma rede, independente do levantamento dos coeficientes do método polinomial, que precisam ser ajustados para cada termopar e para cada faixa de forma única.

Assim, é objetivo deste estudo implementar um transdutor inteligente, que possa ser treinado em tempo real. Para tal, uma interface computacional será criada para aquisição de dados e treinamento da rede. A rede ótima terá seus pesos implementados em um microcontrolador, configurando, assim, um sistema de auto-calibração de sensores.

O treinamento multiobjetivo da rede visa diminuir o custo da implementação do sistema proposto em hardware, mais especificamente na implementação dos pesos ajustados pela RBRF no microcontrolador. O objetivo é que os menores pesos possam ser descartados sem prejuízo para a linearização da relação entrada/saída do sensor.

Agradecimentos

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais e ao Instituto Federal de Minas Gerais, ambos pelo apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

Referências

Bajzek, T. J. (2005). Thermocouples: a sensor for measuring temperature, *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine* 8(1): 35–40.

Braga, A. P., Takahashi, R. H. C., Costa, M. A. and R. A. Teixeira. In: (Org.). 1 ed. :, v. p. . (2006). Multi-objective algorithms for neural network learning, in Y. Jin (ed.), Multi-Objective Machine Learning, 1st edn, Springer, Berlin, pp. 151–171.

Chatterjee, A., Munshi, S., Dutta, M. and Rakshit, A. (2000). An artificial neural linearizer for capacitive humidity sensor, *Proceedings of the 17th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, IEEE IMTC*, Vol. 1, pp. 313–317.

da Motta Salles Barreto, A. (2003). Algoritmo genético dos mínimos quadrados ortogonal

- para o treinamento de redes RBF, Master's thesis, COPPE, UFRJ.
- Dempsey, G. L., Alt, N. L., Olson, B. A. and Alig, J. S. (1997). Control sensor linearization using a microcontroller-based neural network, *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, IEEE SMC*, Vol. 4, pp. 3078–3083.
- Haykin, S. (1998). Neural Networks: A Comprehensive Foundation, 2nd edn, Prentice Hall.
- INMETRO (2005). Vocabulário internacional de termos de metrologia legal: portaria IN-METRO no. 163 de 06 de setembro de 2005, INMETRO, Rio de Janeiro.
- Jin, Y. C. and Sendhoff, B. (2008). Pareto-based multiobjective machine learning: An overview and case studies, *IEEE Transactions on Sys*tems, Man, and Cybernetics, Part C - Applications and Reviews 38(3): 397–415.
- Klopfenstein, L. R. (1994). Software linearization techniques for thermocouples, thermistors, and RTDS, *ISA Transactions* **33**(3): 293–305.
- Medrano-Marques, N. J. and del Brio, B. M. (2000). A general method for sensor linearization based on neural networks, *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS 2000*, Vol. 2, Geneva, Switzerland, pp. 497–500.
- NIST (1995). NIST ITS-90 thermocouple database. available at the url http://srdata.nist.gov/its90/main/.
- Patra, J. C., Ang, E. L. and Das, A. (2004). Neural network-based intelligent sensor operating in harsh environment, Proceedings of the Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing Conference, pp. 137–142.
- Patra, J. C., Chakraborty, G. and Meher, P. K. (2008). Neural-network-based robust linearization and compensation technique for sensors under nonlinear environmental influences, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I* 55(5): 1316–1327.
- Patra, J. C., Devi, T. A. and Meher, P. K. (2007). Radial basis function implementation of intelligent pressure sensor on field programmable gate array, *Proceedings of the 6th International Conference on Information, Communications & Signal Processing.*
- Pereira, J. M. D., Girao, P. M. B. S. and Postolache, O. (2001). Fitting transducer characteristics to measured data, *IEEE Instrumen*tation & Measurement Magazine 4(4): 26–39.

- Reznik, L. (1998). Intelligent sensor: an attempt to define, *Proceedings of the Second International Conference on Knowledge-Based Intelligent Electronic Systems*, KES 98, Vol. 3, pp. 603–608.
- Teixeira, R. A., Braga, A. P., Takahashi, R. H. C. and Saldanha, R. R. (2000a). Improving generalization of MLPs with multi-objetive optimization, *Neurocomputing (Amsterdam)* **35**(4): 189–194.
- Teixeira, R. A., Braga, A. P., Takahashi, R. H. C. and Saldanha, R. R. (2000b). A multi-objective optimization approach for training artificial neural networks, *Proceedings of the 6th Brazilian Symposium on Neural Networks*, Vol. 1, Rio de Janeiro.
- Weremczuk, J. (1997). Genetic algorithm for smart sensors calibration under disturbing condition, Proceedings of the Instrumentation and Measurement Technology Conference, IEEE IMTC, Vol. 1, Ottawa, Canada, pp. 214–217.