

## EQUIVARIÂNCIA E DESEMPENHO DE UM ALGORITMO DE DECONVOLUÇÃO CEGA

DIEGO BARRETO HADDAD<sup>†\*</sup>, MARIANE REMBOLD PETRAGLIA<sup>†</sup>, PAULO BULKOOOL BATALHEIRO<sup>‡</sup>

*\*Dept. Telecomunicações  
CEFET-RJ UnEd Nova Iguaçu  
CEP 26041-271, Nova Iguaçu, RJ, Brasil*

*†Programa de Engenharia Elétrica, COPPE - DEL/Poli  
Universidade Federal do Rio de Janeiro  
CP 68504, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

*‡Departamento de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro  
CEP 20559-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

Emails: [diego@pads.ufrj.br](mailto:diego@pads.ufrj.br), [mariane@pads.ufrj.br](mailto:mariane@pads.ufrj.br), [bulkool@pads.ufrj.br](mailto:bulkool@pads.ufrj.br)

**Abstract**— Blind deconvolution algorithms are a part of the wide class of adaptive blind signal processing. The blind equalization which they aim to frequently is handled by non-linear iterative equations and natural gradients. Relatively few performance analysis of these algorithms are presented in the literature. This paper proposes a first-order performance analysis of one of these algorithms, as well as elucidates its equivariance in a particular configuration.

**Keywords**— Blind Deconvolution, Adaptive Blind Signal Processing, Independent Component Analysis.

**Resumo**— Algoritmos de deconvolução cega pertencem à ampla classe de algoritmos de processamento adaptativo cego. A equalização autodidata a que se propõem costuma ser resolvida por meio de equações de iteração não-lineares e gradientes naturais. Relativamente poucas análises de desempenho destes algoritmos são apresentadas na literatura. Este artigo propõe uma análise de desempenho de primeira ordem de um destes algoritmos, bem como elucidada sua equivariância numa determinada configuração.

**Keywords**— Deconvolução cega, Processamento Adaptativo Cego de Sinais, Análise de Componentes Independentes.

### 1 Introdução

A recuperação de sinais distorcidos por uma função de transferência dispersiva é uma tarefa desafiadora, bem como importante. Quando deseja-se encontrar filtros que revertam o efeito do canal na (quase) ausência de conhecimentos acerca do canal e dos sinais transmitidos, recorre-se a algoritmos de deconvolução cega.

Se diversos sinais e sensores estão envolvidos, a deconvolução é dita multicanal. Nestas configurações, é possível relacionar os algoritmos de deconvolução e os de separação cega de fontes (os quais se confundem no caso de misturas instantâneas).

A grande maioria dos algoritmos de deconvolução/separação cegas de fontes propostos são iterativos (quando as fontes apresentam uma estrutura simples, podem existir soluções analíticas, como relatado em van der Veen (1997)). A equação de atualização dos parâmetros é em geral não-linear, o que dificulta análises teóricas de convergência e desempenho. Por esta razão, a maior parte dos artigos verifica o desempenho dos algoritmos por meio de simulações (vide P. Chevalier (2004) e Y. Singh (2001), por exemplo).

Este artigo tem por objetivo analisar um dos algoritmos propostos em S. C. Douglas (2005), o qual

contempla o problema monocanal. Este algoritmo será denominado DCGN (de Deconvolução Cega utilizando Gradiente Natural).

### 2 Exposição do algoritmo DCGN

Suponhamos que um sinal  $s$  (cujas amostras sejam independentes e identicamente distribuídas) seja distorcido por um canal, antes de chegar ao receptor. Seja  $h$  o filtro de ordem  $M$  correspondente ao canal e  $w$  o filtro de ordem  $L$  do equalizador. O sinal recebido é  $x(k) = (s * h)(k)$  e a estimativa do equalizador linear é  $y(k)$  e definindo:

$$\mathbf{w}(k) = [w_0(k)w_1(k) \cdots w_L(k)], \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(k) = [x(k)x(k-1) \cdots x(k-L)]^T, \quad (2)$$

$$y(k) = \mathbf{w}(k)\mathbf{x}(k), \quad (3)$$

e

$$f(y(k)) = -\frac{d \ln(p(y(k)))}{dy(k)}, \quad (4)$$

onde  $p(s)$  é a função densidade de probabilidade (possivelmente aproximada) do sinal transmitido, podemos expressar a equação de atualização do algoritmo (o qual ignora a função de transferência do

canal) em questão por:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu [\mathbf{w}(k) - f(y(k))\mathbf{z}^T(k)], \quad (5)$$

onde  $\mathbf{z}(k) = \mathbf{R}(k)\mathbf{x}(k)$ , com  $\mathbf{R}(k)$  sendo uma matriz simétrica expressa por:

$$\mathbf{R}(k) = \begin{bmatrix} r_k(0) & r_k(1) & \cdots & r_k(L) \\ r_k(-1) & r_k(0) & \cdots & r_k(L-1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_k(-L) & r_k(-L+1) & \cdots & r_k(0) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

onde  $r_j(l) = \sum_{p=0}^{L-|l|} w_p(j)w_{p+|l|}(j)$ . Em S. C. Douglas (2005), afirma-se ser difícil justificar teoricamente o desempenho do algoritmo, porque uma análise estatística completa do comportamento da convergência é difícil de obter. Efetuar uma análise estatística aproximada deste algoritmo é o objetivo deste trabalho.

### 3 Equivariância no caso $M = L = 1$ sem atraso

Um algoritmo de deconvolução é dito ser equivariante caso seu desempenho e convergência independam do canal. Para o caso instantâneo e (super)determinado (ou seja, na ausência de multipercursos ou atrasos entre sensores, e quando o número destes não é superado pelo número de fontes), alguns algoritmos apresentam esta propriedade (excetuando-se os casos de uma matriz de mistura singular), vide, por exemplo, J.-F. Cardoso (1996).

Já em configurações convolutivas, muitos algoritmos são considerados equivariantes, embora muitas destas afirmativas sejam menos fundamentadas em sólida base matemática do que em extensões heurísticas do caso instantâneo (por exemplo, vide H. Buchner (2005)). O algoritmo DCGN, embora empregue uma variante do gradiente natural, não é equivariante em sentido estrito, já que seu desempenho final depende do filtro do canal  $h$ .

Nesta seção, mostraremos que, num caso simples e empregando um conceito amplo da propriedade da equivariância, podemos dizer que esta é respeitada pelo algoritmo DCGN. Seja  $\mathbf{h} = [h_0 \ h_1]$  e  $\mathbf{w} = [w_0 \ w_1]$ . O filtro que condensa as operações do canal e do equalizador é dado por  $\mathbf{c} = (h * w) = [c_0 \ c_1 \ c_2]$ . Sejam as seguintes hipóteses:

- i)  $M = L = 1$ ;
- ii)  $h_0 h_1 \neq 0$ , apresentando  $h_0$  e  $h_1$  mesma ordem de magnitude<sup>1</sup>;
- iii) o algoritmo converge para uma solução sem atraso e de baixa ISI (interferência intersimbólica), ou seja,  $|c_0| \gg |c_d|$ , para  $d \neq 0$ .

Admitida a primeira hipótese, podemos desmembrar a equação iterativa de atualização em duas equações escalares:

$$\begin{aligned} w_0(k+1) &= w_0(k) + \mu w_0(k) - \mu f(y(k))w_0^2(k)x(k) \\ &\quad - \mu f(y(k))w_1^2(k)x(k) \\ &\quad - \mu f(y(k))w_0(k)w_1(k)x(k-1) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} w_1(k+1) &= w_1(k) + \mu w_1(k) - \mu f(y(k))w_0(k)w_1(k)x(k) \\ &\quad - \mu w_0^2(k)f(y(k))x(k-1) \\ &\quad - \mu w_1^2(k)f(y(k))x(k-1) \end{aligned} \quad (8)$$

Após manipulações matemáticas, podemos expressar as equações de atualização em função dos parâmetros do sistema global:

$$\begin{aligned} \Delta c_0 &= \mu c_0 - \mu \frac{c_0^2}{h_0} f(y(k))x(k) - \mu \frac{h_0 c_2^2}{h_1^2} f(y(k))x(k) \\ &\quad - \mu \frac{c_0 c_2}{h_1} f(y(k))x(k-1), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta c_2 &= \mu c_2 - \mu \frac{c_0 c_2}{h_0} f(y(k))x(k) \\ &\quad - \mu \frac{h_1 c_0^2}{h_0^2} f(y(k))x(k-1) - \mu \frac{c_2^2}{h_1} f(y(k))x(k-1), \end{aligned} \quad (10)$$

onde eliminamos os índices  $k$  nos termos  $c_i(k)$  e  $\Delta c_i = c_i(k+1) - c_i(k)$ . Admitindo  $\mu$  suficientemente pequeno, podemos associar as equações acima às equações determinísticas abaixo:

$$c_0 = E \left[ f(y(k)) \left\{ \left[ \frac{c_0^2}{h_0} + \frac{h_0}{h_1^2} c_2^2 \right] x(k) + \frac{1}{h_1} c_0 c_2 x(k-1) \right\} \right], \quad (11)$$

$$c_2 = E \left[ f(y(k)) \left\{ \frac{1}{h_0} c_0 c_2 x(k) + \left[ \frac{h_1}{h_0^2} c_0^2 + \frac{1}{h_1} c_2^2 \right] x(k-1) \right\} \right], \quad (12)$$

onde  $E[\cdot]$  é o operador de média estatística. Cumpre agora recorrer a algumas simplificações.

Em nossas simulações, caso inicializemos  $\mathbf{w}$  como  $[1 \ 0]$  e  $h_0$  seja maior do que  $h_1$  (o que é uma situação comum, já que as versões atrasadas do sinal tendem a estar mais atenuadas),  $c_0$  costuma ser muito maior do que  $c_1$  e  $c_2$  (admitindo convergência do algoritmo para uma boa solução). Supondo que isso ocorra,  $y(k)$  deve ser muito próximo (a menos da constante multiplicativa  $c_0$ ) de  $s(k)$  (isso é o mesmo que dizer que o sistema canal/equalizador não introduz atrasos). Estas considerações tornam as hipóteses admitidas como relativamente naturais. Supondo que as amostras  $s(k)$  são i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas),  $y(k)$  deve ser aproximadamente independente tanto de  $s(k-1)$  quanto de  $s(k-2)$ , o que nos leva a concluir que tanto  $E[f(y(k))s(k-1)]$  quanto  $E[f(y(k))s(k-2)]$  são aproximadamente nulos. Lembrando que  $x(k) = h_0 s(k) + h_1 s(k-1)$  e  $x(k-1) = h_0 s(k-1) + h_1 s(k-2)$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} c_0 &\approx c_0^2 E[f(y(k))s(k)] + \frac{h_0^2}{h_1^2} c_2^2 E[f(y(k))s(k)] \\ &= \left[ c_0^2 + \frac{h_0^2}{h_1^2} c_2^2 \right] E[f(y(k))s(k)] \end{aligned} \quad (13)$$

Pelas hipóteses (ii) e (iii), podemos desprezar o termo  $\frac{h_0^2}{h_1^2} c_2^2$ . Assim, chegamos a:

$$c_0 \approx c_0^2 E[f(y(k))s(k)],$$

de onde obtemos:

$$c_0 \approx \pm \frac{1}{E[f(y(k))s(k)]},$$

onde a ambiguidade de escalamento gerou o sinal  $\pm$ . Supondo que o equalizador tenha sido bem-sucedido, podemos utilizar a aproximação  $y(k) \approx$

<sup>1</sup>Em todo o artigo, supomos que o filtro correspondente ao canal é invariante no tempo.

$c_0 s(k)$  e então obtemos o primeiro resultado deste artigo:

$$c_0 \approx \pm \frac{1}{E[f(c_0 s(k))s(k)]}. \quad (14)$$

Supondo conhecidas as estatísticas das fontes, o termo  $E[f(c_0 s(k))s(k)]$  pode ser calculado para qualquer valor de  $c_0$  (quando o cálculo não é analiticamente possível, cabe recorrer a médias computacionais). O resultado acima sugere que o valor para o qual  $c_0(k)$  converge (quando  $k \rightarrow \infty$ ) praticamente independe da resposta do canal (propriedade da equivariância), o que é uma característica desejável (especialmente, como no caso do algoritmo sob análise, quando o gradiente empregado na minimização é o gradiente natural). Porém, o mesmo não ocorre com  $c_1(k)$  e  $c_2(k)$ , o que significa que não podemos afirmar que o algoritmo é completamente equivariante. Porém, (14) nos revela que, de alguma forma, podemos interpretar a técnica DCGN como atendendo à equivariância na configuração sem atraso (cumprir lembrar a hipótese  $|c_0| \gg |c_d|$ , para  $d \neq 0$ ).

O resultado acima permite-nos, a partir do conhecimento da função  $f$  e das estatísticas do sinal transmitido (o que é possível quando, por exemplo, é conhecida a modulação de um sinal digital transmitido), estimar  $c_0$ , variando seu valor e verificando quando a condição (14) é satisfeita.

A ISI do sistema global (parcialmente controlado pelo equalizador, já que este não altera a resposta ao impulso do canal) pode ser expressa como:

$$ISI(k) = \frac{\sum_i c_i^2(k)}{\max_j c_j^2(k)} - 1. \quad (15)$$

A análise acima apresenta dois inconvenientes: a) a aproximação (14) não nos permite prever o desempenho final do algoritmo, já que a ISI depende da relação entre  $c_0$  e os restantes coeficientes  $c_i$ ; b) o algoritmo na sua forma sem atraso não é ótimo (comumente aceita-se como ótimo um atraso localizado no centro de  $c$ ; neste sentido, X. Sun (2005) alega razões de simetria). Estes problemas serão contornados por uma análise mais acurada, vista a seguir.

#### 4 Análise de Primeira Ordem do Algoritmo DCGN

Por simplicidade, efetuaremos a análise no caso  $M = L = 1$ ; cabe ressaltar que esta análise, ao contrário da anterior, não está restrita a este caso, como poderá ser observado nas simulações. A análise a ser efetuada associa uma configuração a um sistema de equações não-lineares, cuja solução resulta em estimativas dos parâmetros  $w_i(k)$  para os quais o algoritmo converge. Começemos por admitir duas hipóteses: (a) o algoritmo converge para uma solução de bom desempenho e (b) a fonte apresenta amostras iid, de média zero e distribuição

simétrica. Importa enfatizar o relaxamento das restrições em relação à análise anterior.

Após verificarmos que a abordagem de análise de algoritmos proposta em (Ljung (1977)), embora poderosa, não é adequada para descrever o algoritmo (devido às aproximações inerentes à análise de primeira ordem), recorreremos à aproximação  $w_i(k+1) \approx w_i(k)$ , para  $i = 1, 2$ , o que nos permite, após a convergência, elidir o índice  $k$  dos parâmetros  $w_0$  e  $w_1$ , obtendo:

$$0 \approx w_0 - \frac{(w_0^2 + w_1^2)E[f(y(k))x(k)]}{-w_0 w_1 E[f(y(k))x(k-1)]}, \quad (16)$$

$$0 \approx w_1 - \frac{(w_0^2 + w_1^2)E[f(y(k))x(k-1)]}{-w_0 w_1 E[f(y(k))x(k)]}, \quad (17)$$

onde admitimos  $\mu$  suficientemente pequeno. A hipótese (a) implica que podemos empregar a aproximação de primeira ordem:

$$f(y(k)) \approx f(c_1 s(k-1)) + c_0 f'(c_1 s(k-1))s(k) + c_2 f'(c_1 s(k-1))s(k-2). \quad (18)$$

Expressando  $x(k)$  e  $x(k-1)$  em função de  $s(k-i)$  e substituindo na equação (18), temos:

$$\begin{aligned} E[f(y(k))x(k)] &= h_1 \overbrace{E[f(c_1 s(k-1))s(k-1)]}^{=\alpha(c_1)} \\ &\quad + h_0 c_0 \overbrace{E[f'(c_1 s(k-1))]}^{=\beta(c_1)} \overbrace{E[s^2(k)]}^{=\sigma_s^2} \\ &= h_1 \alpha(c_1) + h_0 c_0 \beta(c_1) \sigma_s^2 \end{aligned}, \quad (19)$$

de forma semelhante, chegamos a:

$$E[f(y(k))x(k-1)] = h_0 \alpha(c_1) + h_1 c_2 \beta(c_1) \sigma_s^2, \quad (20)$$

onde utilizamos as suposições das amostras de  $s(n)$  sendo iid, de média nula e variância  $\sigma_s^2$ . Cabe atentar para o fato de que  $\alpha(c_1)$  e  $\beta(c_1)$  são dependentes de estatísticas da fonte  $s(k)$ .

Isso nos permite reescrever as equações (16) e (17) da forma a seguir:

$$0 \approx w_0 - \frac{(h_1 w_0^2 + h_1 w_1^2 + h_0 w_0 w_1) \alpha(c_1)}{-(h_0^2 w_0^3 + h_0^2 w_0 w_1^2 + h_1^2 w_0 w_1^2) \beta(c_1) \sigma_s^2}, \quad (21)$$

$$0 \approx w_1 - \frac{(h_0 w_0^2 + h_0 w_1^2 + h_1 w_0 w_1) \alpha(c_1)}{-(h_1^2 w_0^3 w_1 + h_1^2 w_1^3 + h_0^2 w_0^2 w_1) \beta(c_1) \sigma_s^2}, \quad (22)$$

onde utilizamos o fato de que  $c_0 = h_0 w_0$  e  $c_2 = h_1 w_1$  (por simplicidade, optamos por não expressar  $c_1$  como  $h_0 w_1 + h_1 w_0$ ).

Encontrar as soluções do sistema de equações acima implica estimar os parâmetros  $w_0$  e  $w_1$ , o que nos permitiria, sem recursos a simulações ou a médias do tipo Monte Carlo, obter teoricamente o desempenho do algoritmo numa determinada configuração (ou seja, para determinados valores de  $h_0$  e  $h_1$ ). O sistema de equações é não-linear, o que dificulta uma análise teórica.

##### 4.1 Caso particular: distribuições exponenciais

Um caso particular da função  $f$  simplifica o sistema de equações dado por (21) e (22), sendo por

isso analisado a seguir. Esta análise também permite explicitar a metodologia do cálculo de  $\alpha(c_1)$  e  $\beta(c_1)$ .

Suponhamos que a distribuição de  $s(n)$  seja exponencial, de média zero e parâmetro  $\gamma > 0$ . Logo, temos:

$$p(s) = \frac{1}{2\gamma} e^{-\frac{|s|}{\gamma}} \quad (23)$$

Escolhendo  $f$  de forma que  $f(s) = -\frac{d \log p(s)}{ds}$ , temos:

$$f(s) = -\frac{d \log \left( \frac{1}{2\gamma} \right)}{ds} + \frac{d \frac{|s|}{\gamma}}{ds} = \frac{\text{sign}(s)}{\gamma} \quad (24)$$

Neste caso, podemos calcular  $\alpha(c_1)$  analiticamente:

$$\begin{aligned} \alpha(c_1) &= E [s(n-1)f(c_1 s(n-1))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s \frac{\text{sign}(c_1 s)}{\gamma} \frac{1}{2\gamma} e^{-\frac{|s|}{\gamma}} ds \\ &= \frac{1}{2\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} s \text{sign}(c_1 s) e^{-\frac{|s|}{\gamma}} ds \end{aligned} \quad (25)$$

Sendo a distribuição da fonte simétrica, ocorre uma ambiguidade de escalamento do equalizador, o que nos leva a supor, sem perda de generalidade que  $c_1 > 0$ . Logo:

$$\alpha(c_1) = \frac{1}{2\gamma^2} \left[ -\int_{-\infty}^0 s e^{\frac{s}{\gamma}} ds + \int_0^{\infty} s e^{-\frac{s}{\gamma}} ds \right] = 1 \quad (26)$$

Para o caso  $c_1 < 0$ , temos que  $\alpha(c_1) = -1$ ; daí:

$$\alpha(c_1) = \text{sign}(c_1) \quad (27)$$

Sendo  $f(s) = \frac{\text{sign}(s)}{\gamma}$ , temos que  $f'(s) = 0$ . Isso implica que  $\beta(c_1) = 0$  (exceto na descontinuidade presente em  $s = 0$ ; porém esta condição possui probabilidade nula de ocorrência, o que nos permite desconsiderá-la). Daí, temos que o sistema de equações (21) e (22) (para o caso  $M = L = 1$ ) pode ser simplificado <sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} h_1 w_0^2 + (h_0 w_1 - 1) w_0 + h_1 w_1^2 &\approx 0 \\ h_0 w_1^2 + (h_1 w_0 - 1) w_1 + h_0 w_0^2 &\approx 0 \end{aligned} \quad (28)$$

É possível explicitar de forma analítica a solução desse sistema de equações:

$$w_0 = \frac{1 - h_0 w_1 \pm \sqrt{1 + h_0^2 w_1^2 - 2h_0 w_1 - 4h_1^2 w_1^2}}{2h_1}, \quad (29)$$

$$w_1 = \frac{1 - h_1 w_0 \pm \sqrt{1 + h_1^2 w_0^2 - 2h_1 w_0 - 4h_0^2 w_0^2}}{2h_0}, \quad (30)$$

onde, após encontrar os possíveis valores de  $w_0$  na equação (29), podemos encontrar  $w_1$  por meio da equação (30). É possível expressar as soluções acima numa forma que não exija essa substituição, porém o resultado é por demais extenso.

Em casos mais complexos (e mais práticos), esta

solução apresenta uma extensão que a torna pouco útil. Obviamente, a solução trivial ( $w_0 = w_1 = 0$ ) deve ser excluída (bem como eventuais soluções complexas, as quais podem surgir quando  $M$  e  $L$  assumem valores maiores).

O sistema de equações (29)-(30) apresenta uma solução para um caso particular que ilustra uma propriedade desejável do algoritmo. Seja o caso em que  $h_0 = 0$  e  $h_1 \neq 0$ . Ou seja, o canal apenas introduz um atraso unitário no sinal e multiplica-o por  $h_1$ . Nesta configuração, manter o atraso unitário na saída do equalizador sem alterar a fonte significa termos  $w_0 = 1/h_1$  e  $w_1 = 0$ . Admitindo  $w_1 = 0$ , a equação (29) (descartando a solução trivial  $w_0 = 0$ ), fornece-nos justamente o valor  $w_0 = 1/h_1$ , conforme esperado. O mesmo comportamento se observa caso façamos  $h_0 \neq 0$  e  $h_1 = 0$ , quando o valor ideal do vetor  $\mathbf{w}$  seria  $\mathbf{w} = [0 \ 1/h_0]$  (supondo atraso unitário).

#### 4.2 Abordagem das configurações genéricas

O cálculo algébrico para as configurações genéricas (isto é, para  $M$  e  $L$  quaisquer) é, em geral, muito trabalhoso. Além disso, os sistemas de equações não lineares devem ser resolvidos, daí a necessidade de alguma técnica numérica. Em outro artigo, exporemos melhor nossa abordagem das configurações genéricas.

## 5 Simulações

### 5.1 Experimento I

Seja um sinal  $s(n)$  gerado a partir de uma pdf exponencial  $p(s) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|s|}{\lambda}}$ . Utilizamos 5000 amostras,  $f(y) = y^3$ ,  $\mathbf{h} = [1 \ 0 \ 3]$ ,  $\lambda = 1$ , inicialização de  $\mathbf{w} = [1 \ 0]$  e  $\mu = 10^{-2}$ , e 400 iterações do tipo *offline*. O valor real de  $c_0$  foi -0,45558, bem próximo da condição (14), a qual fornece uma estimativa próxima de -0,46. Já o valor de  $c_1$  obtido (após a convergência) foi de -0,0241 e o de  $c_2$ , 0,0338, o que confirma a hipótese *iii*).

Esta constatação ilustra a aplicação da aproximação (14), demonstrando que, satisfeitas as hipóteses empregadas, a aproximação revela-se acurada.

### 5.2 Experimento II

Seja o caso  $M = L = 2$ . Como ilustração, apresentamos duas das três equações do sistema de equações a ele associado:

$$\begin{aligned} h_2 w_0^2 + (h_1 w_1 + h_0 w_2 - 1) w_0 + h_2 w_1^2 + h_2 w_2^2 + h_1 w_1 w_2 &= 0 \\ h_0 w_2^2 + (h_2 w_0 + h_1 w_1 - 1) w_2 + h_1 w_0 w_1 + h_0 w_0^2 + h_0 w_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

<sup>2</sup>Supomos aqui o caso  $c_1 > 0$ ; para analisar a possibilidade  $c_1 < 0$ , basta inverter o sinal dos parâmetros  $w_0$  e  $w_1$ .

Sejam as quatro possíveis escolhas para o filtro do canal:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 &= [ 0,19687 & -1,5556 & 0,087869 ] \\ \mathbf{h}_2 &= [ 0,11839 & -0,78388 & -0,18287 ] \\ \mathbf{h}_3 &= [ -0,37657 & 1,3414 & 0,073948 ] \\ \mathbf{h}_4 &= [ -0,072526 & 0,39283 & -0,0047669 ] \end{aligned}$$

Testamos o algoritmo com 150.000 iterações *on-line*,  $\mu = 5.10^{-5}$ ,  $p(s)$ , uma função exponencial com  $\lambda = 0,1$ ,  $f(s) = \frac{\text{sign}(s)}{\lambda}$  (escolha ótima) e o vetor  $\mathbf{w}$  inicializado como  $[0 \ 1 \ 0]$ .

Nas quatro configurações (especificadas acima), a ISI final do algoritmo é inferior a -22 dB (com um atraso  $D = 2$ ), tornando válida a hipótese de convergência para uma boa solução. Associando cada uma das configurações ao sistema de equações dado por (31), podemos, resolvendo-o, obter estimativas dos valores finais dos parâmetros. O sistema de equações apresenta em geral múltiplas raízes. Em nossas simulações, o procedimento de escolher as soluções que apresentam a menor ISI sempre selecionou a configuração mais próxima daquela para a qual o algoritmo converge.

A Tabela 1 compara a ISI final e a teórica nos quatro casos; o \* evidencia o resultado oriundo de 50 médias Monte Carlo. Verifica-se elevada concordância entre a teoria e a simulação. O maior erro ocorre no terceiro caso, exatamente aquele onde a ISI final é mais elevada. A Figura 1 ilustra a evolução da ISI, permitindo avaliar graficamente a ISI final com a estimada. Os resultados evidenciam que a análise teórica consegue prever com razoável precisão tanto os valores para os quais  $\mathbf{w}$  converge quanto o desempenho final do algoritmo.

## 6 Conclusões

Este artigo dedicou-se à análise do algoritmo DCGN, na sua versão monocanal. Elucidamos em que sentido a configuração  $M = L = 1$  pode ser chamada de equivariante. Apresentamos uma técnica que permite estimar o desempenho do algoritmo, particularmente para  $M$  e  $L$  reduzidos. Este tipo de análise pode auxiliar outros estudos teóricos de propriedades do algoritmo. Com este objetivo, estamos nos dedicando a efetuar uma análise mais exata.

Tabela 1: ISIs simulada e teórica (em dB) para as quatro configurações do experimento II.

caso	ISI simulada	ISI simulada*	ISI teórica
1	-35,2675	-34,8327	-35,4033
2	-24,8406	-24,8316	-24,5383
3	-22,1663	-22,0753	-21,1847
4	-28,7213	-28,9459	-28,8378

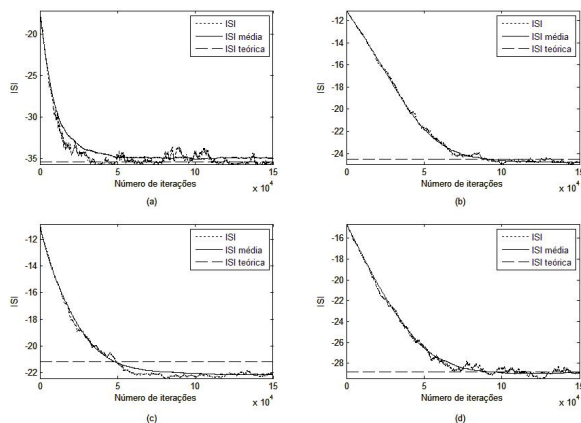


Figura 1: Evolução da ISI (em dB) (em linha pontilhada), evolução média da ISI (em linha cheia) e ISI teórica (linha tracejada) para o experimento II: (a) caso 1; (b) caso 2; (c) caso 3 e (d) caso 4.

## Referências

- H. Buchner, R. Aichner, W. K. (2005). A generalization of blind source separation algorithms for convolutive mixtures based on second-order statistics, *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing* **13**: 803–806.
- J.-F. Cardoso, B. H. L. (1996). Equivariant adaptive source separation, *IEEE Transactions on Signal Processing* **44**(12): 3017–3030.
- Ljung, L. (1977). Analysis of recursive stochastic algorithms, *IEEE Trans. Automatic Control* **22**: 551–575.
- P. Chevalier, L. Albera, P. C. A. F. (2004). Comparative performance analysis of eight blind source separation methods on radiocommunications signals, *IEEE IJCNN* **1**: 25–29.
- S. C. Douglas, H. Sawada, S. M. (2005). Natural gradient multichannel blind deconvolution and speech separation using causal fir filters, *IEEE Transactions on Signal Processing* **13**: 92–104.
- van der Veen, A.-J. (1997). Analytical method for blind binary signal separation, *IEEE Transactions on Signal Processing* **45**: 1068–1072.
- X. Sun, S. C. D. (2005). Mean square error analyses of multichannel blind deconvolution algorithms, *Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers* **1**: 648–652.
- Y. Singh, C. S. R. (2001). A comparison of bss algorithms, *Proceedings of IEEE IJCNN* **2**: 15–19.