1° Congresso Brasileiro de Redes Neurais

Escola Federal de Engenharia de Itajuba
Itajuba. 24 a 27 de outubro de 1994

Especificando Formalmente Redes Neurais via MOFEU

DÉBORA ABDALLA
EDSON COSTA DE BARROS CARVALHO FILHO

Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Informática
Cx. Postal 7851 - 50.732-970 - Recife - PE - Brazil
{das,ecdbcf}@di.ufpe.br

Sumário. Este artigo apresenta uma visão geral do modelo formal de especificação universal para redes neurais. MOFEU. O modelo é representado por uma estrutura matemática que permite uma especificação a nível de neuronio. arquitetura. aprendizagem e modo de operação. Um aspecto temporal é fornecido no sentido que a configuração e o estado são dinamicos e podem ser instanciados em um dado instante de tempo. Os modelos de redes neurais que poderem ser especificados via MOFEU são chamados de redes neurais bem formadas. Argumenta-se que este modelo seja geral o suficiente para representar uma grande variedade de paradigmas. É mostrada. ainda. a equivalencia das redes neurais bem formadas com sistemas normais dinamicos. Desta forma. algumas propriedades encontradas na teoria geral de sistemas são trazidas para os sistemas neurais.

1 Introdução

Neste artigo é apresentado um modelo de especificação formal para redes neurais. A motivação para tal pesquisa se deve ao fato do grande número de trabalhos em redes neurais que vem sendo progressivamente desenvolvidos [10. 11. 7. 6. 1. 5] e na constatação de que a maioria dos seus resultados são baseados em simulações computacionais. A falta de formalização da especificação das ações dos vários paradigmas de redes neurais contribui para o mal entendimento do funcionamento e comportamento das redes. O processo de análise das propriedades inteligentes (comportamento) das redes é o primeiro a sofrer com esta carencia de formalismo. uma vez que para verificar se um dado modelo de rede possui um dado comportamento faz-se necessário a implementação e simulação da rede.

As técnicas de especificação formal estão tendo um grande impulso no desenvolvimento de software. as técnicas para especificação e desenvolvimento de aplicações em Inteligencia Artificial não estão bem definidas até o presente estado da arte [9]. Uma formalização e uma sólida fundamentação são essenciais para auxiliar a área de redes neurais alcançar sua maturidade [4]. Um modelo matemático para uma teoria unificada de aprendizagem neural para várias arquiteturas de redes neurais pode ser encontrado em [8]. O modelo é aplicável a um único neuronio. a uma rede de camadas e a um sistema neural auto-organizável com conexões retroativas. Assim. tenta-se estabelecer alguns fundamentos matemáticos na neurocomputação.

O MOdelo Formal de Especificação Universal para redes neurais - MOFEU. procura definir uma estrutura matemática que permita especificar de forma universal a maior quantidade possível de paradigmas de redes neurais. Tal modelo. além de se prestar para especificação universal. apresenta a caracteristica altamente importante de que os paradigmas de redes neurais especificados neste modelo são equivalentes a um sistema normal dinamico.

O uso de especificações formais. em redes neurais. irá facilitar a automatização do processo de construção. animação e análise do comportamento de redes neurais. Uma segunda abordagem. para fazer o uso da especificação formal. é a inferencia de propriedades fundamentais da rede utilizando provas formais sem a necessidade de simulação. buscando assim. resultados mais consistentes e confiaveis do que a simulação.

2 A Proposta do Modelo Formal

Pode-se datar entre os anos próximos de 1950 uma mudança no pensar cientifico [2]. Começava a se ressaltar o valor das teorias. em particular as formuladas com o auxílio da matemática. Com o uso da linguagem matemática. pretendia-se combater a falta de precisão e clareza nas formulações científicas. Difundiu-se. então. a construção de objetos-modelos e modelos teóricos. Um modelo não é somente uma descrição abstrata da realidade. mas também uma simplificação que desconsidera algumas caracteristicas essenciais. Primeiro observa-se o objeto de estudo e realiza-se as primeiras conjecturas. Diante das informações recolhidas deve-se identificar as que são relevantes e ordená-las. Como resultado obtem-se objetos-modelos ou modelos conceituais que poderão dar uma imagem simbólica do real.

A vantagem de se ter modelos conceituais é a contribuição dada ao entendimento e explicação da realidade. Os modelos formais exigem uma análise rigorosa e exata, portanto, eles conduzem a uma abordagem mais crítica e uma melhor definição da realidade. Além disto, na medida que teorias e experiências são contestadas ou enriquecidas, elas são desfeitas e substituídas por outras mais convenientes.

O modelo formal proposto, MOFEU, objetiva representar o maior número possível de diferentes paradigmas. Para encontrar tal modelo genérico é necessário o conhecimento e análise dos vários paradigmas existentes e um posterior processo de abstração onde características comuns serão selecionadas. Como resultado, é obtido um conjunto de conceitos fundamentais os quais formarão a base para a construção de um modelo onde qualquer paradigma de rede neural será considerado uma de suas instâncias. Um modelo com tal propriedade será chamado *universal*. Assim, o modelo define os elementos essencias para que uma rede neural apresente comportamento inteligente. Estes elementos serão chamados de *canônicos* e estarão representados através de ferramentas matemáticas, tais como: conjuntos, relações e funções. Desta forma espera-se apresentar um modelo claro e preciso, definindo-se uma metodologia formal para descrever neurônios, arquiteturas e processos de aprendizagem.

Tem-se, então, que uma rede neural $\mathcal{NN}$ é definida através da sequinte estrutura:

$$\mathcal{NN} = \langle N, T, D, F, D_0 \rangle$$

onde:

N — Conjunto contendo todos os neurônios que compõem a rede. Cada neurônio é identificado por um índice de forma que um neurônio i é referenciado por n_i. Assim, o número total de neurônios é dado pelo índice n. $\mathrm{N} = \{n_1, n_2, ..., n_n\}$.

T — Conjunto de pares ordenados de neurônios, ou seja, uma relação sobre N determinando a topologia da rede. Qualquer conexão entre dois neurônios deve estar representada por um par ordenado em T. Por exemplo, se a saída de n_i é entrada para n_j então o par (n_i, n_j) pertence a T. $T \subseteq \{(n_i, n_j) \in (N \times N)\}$.

D — Domínio da rede. Conjunto formado por 3 conjuntos, W, A e Θ. Define uma faixa de valores sobre a qual o estado e a configuração podem variar a partir do tempo inicial ($t = 0$) até um tempo final ($t = m$). O estado da rede é definido como a saída de todos os neurônios em um dado instante. A configuração é definida como o estado da rede, mais os valores de todos os pesos e memórias locais. $D = \{W, A, \Theta\}$.

O conjunto W representa todos os pesos associados às conexões pertencentes a T para qualquer instante do intervalo de tempo definido. $W = \{w_{ij}(t) \mid w_{ij}(t) \in \mathbb{R} : t = 0, 1, ..., m \text{ e } (n_i, n_j) \in T\}$.

O conjunto A representa todos os valores de saída (ativação) dos neurônios pertencentes a N. Contém todos os estados pelo qual a rede pode passar durante o intervalo de tempo definido. $A = \{a_j(t) \mid a_j(t) \in \mathbb{R} ; t = 0, 1, ..., m \text{ e } a_j \text{ é a saída de } n_j\}$.

O conjunto Θ representa todos os valores da memória local dos neurônios pertencentes a N para qualquer instante do intervalo de tempo definido. $\Theta = \{\theta_j(t) \mid \theta_j(t) \in \mathbb{R}; \mathrm{t} = 0, 1, ..., \mathrm{m} \text{ e } \theta_j \text{ é a memória local de } n_j\}$.

F — Conjunto de funções que mudam o estado e a configuração da rede. Define, também, o modo de operação. $F = \{F_A, F_W, F_\Theta, F_O\}$.

A função F_A é a função de ativação do neurônio. Nela está definido como um neurônio produz uma saída. A função tem como domínio o conjunto de neurônios N e o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais representando o tempo. A imagem é o conjunto dos valores de saída A. Se a função é aplicada a um neurônio no instante de tempo t, uma saída será produzida no instante $t+1$. Assim, F_A é definida pela seguinte assinatura: $F_A : N \times \mathbb{N} \rightarrow \mathrm{A}$ tal que $F_A(n_j, t) = a_j(t+1)$.

A função F_W é a função pela qual os pesos são alterados. Seu domínio é o conjunto T que contém todas as conexões da rede e o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais representando o tempo. A imagem é o conjunto W dos pesos associados a cada conexão. Se a função é aplicada a uma conexão no instante de tempo t o seu peso terá um novo valor no próximo instante $t+1$. Então, a assinatura de F_W é definida por: $F_W : T \times \mathbb{N} \rightarrow \mathrm{W}$ tal que $F_W((n_i, n_j), t) = w_{ij}(t+1)$.

A função F_Θ é a função que aplicada a um neurônio muda o valor da memória local. O domínio é o conjunto de neurônios N e o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais representando o tempo. A imagem é o conjunto Θ contendo o valor da memória local de cada neurônio em qualquer instante do intervalo de tempo de operação da rede. A assinatura de F_Θ é definida da seguinte forma: $F_\Theta : N \times \mathbb{N} \rightarrow \Theta$ tal que $F_\Theta(n_j, t) = \theta_j(t+1)$.

As funções F_A, F_W e F_Θ dizem como o estado e a configuração da rede mudam de valor. Elas são definidas para atuar em um único neurônio ou uma única conexão. A simulação do funcionamento da rede é dada por um conjuto de 3 funções, onde cada uma delas diz como as tres funções anteriores devem ser aplicadas. Então, F_O é um conjunto de 3 funções, F_{OA}, F_{OW} e $F_{O\Theta}$, definindo o modo de operação da rede. $F_O = \{F_{OA}, F_{OW}, F_{O\Theta}\}$.

A função F_{OA} informa que um grupo de neurônios deve produzir uma saída. Isto é realizado aplicando-se a função F_A a cada neurônio de um subconjunto de N. Seja 2^N o conjunto das partes de N. Rigorosamente. F_{OA} é definida pela seguinte assinatura: $F_{OA} : 2^N \times \{F_A\} \rightarrow 2^A$. Como o conjunto de funções é unitário, para efeitos de simplificação, será utilizado apenas F_A em substituição à $\{F_A\}$. Esta observação será mantida por todo o texto. Assim, tem-se: $F_{OA} : 2^N \times F_A \rightarrow 2^A$.

A função F_{OW} modifica os pesos das conexões de um subconjunto de T. Indica que a função F_W será aplicada a cada par (n_i, n_j) do subconjunto. Seja 2^T o conjunto das partes de T. A assinatura de F_{OW} é dada por: $F_{OW} : 2^T \times F_W \rightarrow 2^W$.

A função $F_{O\Theta}$ define um grupo de neurônios que terão a memória local modificada. Determina que a cada neurônio de um subconjunto de N será aplicado a função F_Θ. Seja 2^N o conjunto das partes de N. Então, a assinatura de $F_{O\Theta}$ é definida por: $F_{O\Theta} : 2^N \times F_\Theta \rightarrow 2^\Theta$.

D_0 — Domínio inicial da rede. Conjunto formado por 3 conjuntos, $A(0)$, $W(0)$ e $\Theta(0)$. Define os valores para o estado inicial e a configuração inicial da rede. $D_0 = \{W(0), A(0), \Theta(0)\}$.

O conjunto $W(0)$ contém todos os pesos no instante $t = 0$. $W(0) = \{w_{ij}(0) \mid w_{ij}(0) \in W\}$.

O conjunto $A(0)$ contém a saída de todos os neurônios no instante $t = 0$. $A(0) = \{a_j(0) \mid a_j(0) \in A\}$.

O conjunto $\Theta(0)$ contém os valores da memória local de todos os neurônios no instante $t = 0$. $\Theta(0) = \{\theta_j(0) \mid \theta_j(0) \in \Theta\}$.

Em resumo, o modelo proposto apresenta-se na forma de tupla, onde a representação universal é obtida via elementos canônicos que são utilizados para especificar neurônio, arquitetura, aprendizagem e modo de operação [12]. Ressalta-se que tal estrutura é representada em termos matemáticos pela utilização de conjuntos, relações e funções. Existe também um cuidado especial na notação. Tentou-se, na medida do possível, utilizar símbolos e expressões que apresentassem uma relação direta com seu significado.

A estrutura matemática proposta para representar modelos de redes neurais, tem se prestado para vários modelos, alguns exemplos de paradigmas especificados via MOFEU podem ser encontrados em [13]. É possível que algum modelo abstrato de rede neural não possa ser especificado pela estrutura universal proposta, neste caso, seria necessário um poder de especificação maior, que pode ser obtido incluindo novos elementos canônicos ao modelo. Os paradigmas de redes neurais que podem ser especificados pelo modelo proposto, serão chamados de *redes neurais bem formadas*.

3 Equivalência de Redes Neurais Bem Formadas e Sistemas Normais Dinâmicos

A abordagem sistemica clama que qualquer fenômeno, seja ele natural ou artificial, é em sua essência um sistema. E como tal, seu entendimento é realizado pela análise das relações e integração entre os componentes. Uma tendência em teoria geral de sistemas é desenvolver métodos que facilitem a construção de sistemas conceituais onde as interações entre os elementos, não necessariamente todas, sejam suficientemente incorporadas.

Uma rede neural é em sua essência um sistema, onde as propriedades inteligentes emergem da composição de unidades menores e mais simples, os neurônios. Assim, foi adotada a teoria geral de sistemas como um caminho favorável a uma especificação formal. A ênfase dada por esta teoria às relações para o entendimento e análise do comportamento de sistemas complexos é o ponto principal para estabelecer uma associação com redes neurais e partir para a compreensão dos diversos paradigmas existentes.

O objetivo é demonstrar a equivalência entre uma *rede neural bem formada* e um *sistema normal dinâmico*. A partir da definição matemática de um sistema geral [3] serão colocadas propriedades adicionais até chegar à definição de sistemas normais dinâmicos. A seguir será apresentada a definição de um sistema geral, um sistema normal e um sistema dinamico, segundo [3], com as devidas demosntrações para redes neurais bem formadas. Uma apresentação detalhada da demonstração da equivalência entre redes neurais bem formadas e sistemas normais dinâmicos pode ser encontrada em [14].

Definição 1 *Um sistema geral é um par ordenado (E, R), onde E é um conjunto de objetos do sistema e R um conjunto de todas relações possíveis entre os objetos de E.*

$$\emptyset \in R \subseteq P(\cup_{n \in Ord} E^n)$$

onde Ord é a clase de todos os números ordinais, E^n o produto cartesiano de E e $P(\cup_{n \in Ord} E^n)$ a coleção de de todos os subconjuntos de $\cup_{n \in Ord} E^n$.

Proposição 1 Dada a definição de um sistema geral (Definição 1), uma rede neural bem formada, $\mathcal{NN}$, é um par ordenado (E', R'). Onde, E' é o conjunto dos objetos do sistema e R' é o conjunto de relações entre eles. Os objetos do sistema são os neurônios e as variáveis. Os neurônios serão representados por um conjunto N. As variáveis serão representadas por três classes de variáveis: um conjunto W de variáveis contendo o peso de cada conexão entre os neurônios.

um conjunto A de variáveis contendo o valor de saída de cada neurônio e um conjunto Θ de variáveis contendo o valor da memória local de cada neurônio. O conjunto de relações R' é constituído de dois tipos de relações: uma relação C estabelecendo as conexões entre os neurônios e um conjunto F de relações sobre as variáveis. Para cada classe de variáveis é definida uma relação sobre ela. Estas relações serão denotadas por F_W, F_A e F_Θ. Assim, tem-se que uma rede neural, $\mathcal{NN} = (E', R')$, é um sistema geral, onde:

(i)

$$\begin{array}{lcl} E' & = & \{N \cup W \cup A \cup \Theta\} \\ N & = & \{n_j | n_j \text{ é um neurônio }, j \in \mathbb{N}\} \\ W & = & \{w_{i,j} | w_{i,j} \text{ é uma variável que associa} \\ & & \text{pesos a uma conexão entre } n_i \text{ e } n_j\} \\ A & = & \{a_j | a_j \text{ é uma variável que contém os} \\ & & \text{valores de saída de um neurônio } n_j\} \\ \Theta & = & \{\theta_j | \theta_j \text{ é uma variável com os valores} \\ & & \text{da memória local de um neurônio } n_j\} \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{lcl} R' & = & \{\, C \,,\, F \,\} \\ C & \subseteq & N \times N \\ F & = & \{F_W \cup F_A \cup F_\Theta\} \end{array}$$

Definição 7 *Um sistema geral* $S = (E, R)$ *é* um sistema normal *se somente se:*

(a) $R = \{C, F\}$, *onde* C *é uma relação estruturada e* F *é uma relação comportamental.*

(b) C *é uma relação de conexão, isto é:* $C \subset E \times E$.

(c) F *é uma relação comportamental global, isto é:* $F \subset \times\{Rx_i : (\forall x_i \in E) \rightarrow (x_i = \mathit{variável}\,)\}$

Proposição 4 Uma rede neural bem formada $\mathcal{NN} = (E', R')$ é um sistema normal.

Demonstração: Para mostrar que uma rede neural é um sistema normal, basta mostrar que ela satisfaz os três itens requeridos pela Definição 7. então tem-se:

(a) $R' = \{C, F\}$, onde C é uma relação estruturada e F é um conjunto de relações comportamentais (estas afirmações foram demosntradas como verdadeiras pela Proposição 2 encontrada em [14]).

(b) $C \subset N \times N$ é uma relação de conexão (esta afirmação é demosntrada como verdadeira pela Proposição 3 encontrada em [14]).

(c) A relação $F = \{F_W, F_A, F_\Theta\}$ é um conjunto de relações comportamentais sobre o conjunto de variáveis W, A, Θ (Proposição 2, ver [14]). Sejam $Rw_{i,j}$, Ra_j, $R\theta_j$ o domínio das variáveis $w_{i,j}$, a_j, θ_j respectivamente e cada F_i definida da seginte forma: $F_W \subset \times\{Rw_{i,j} : w_{i,j} \in W\}$, $F_A \subset \times\{Ra_j : a_j \in A\}$ e $F_\theta \subset \times\{R\theta_j : \theta_j \in \Theta\}$. Pela Definição 6, (ver [14]), cada função F_i é uma relação comportamental global.

Dito isto, uma rede neural bem formada é um sistema normal como se pretendia demonstrar.

Definição 10 *Seja* $S = (E, R)$ *um sistema geral. Seja* Ω *um conjunto de todas as trajetórias sobre* $\mathcal{D}$. *A 4-dupla* $\mathcal{D}S = (E, R, \Omega, \rho)$ *é um* sistema dinâmico *se somente se:*

(a) E *é um conjunto de variáveis.*

(b) R *é uma relação comportamental global.*

(c) ρ *é uma relação entre* Ω *e* $P(R)$, $\rho \subset \Omega \times \mathcal{P}(R)$. *tal que para cada par* $[(T, \leq), B] \in \rho$, *existe um mapeamento* $\phi : T \rightarrow B$.

Proposição 5 Uma rede neural bem formada $\mathcal{NN} = (E', R')$ é um sistema normal dinâmico.

Demonstração: Uma rede neural bem formada. $\mathcal{NN} = (E', R')$, é um sistema normal (Proposição 4).

Para mostrar que ela é um sistema dinâmico primeiro será definido o conjunto de todas as trajetórias, Ω. sobre o espaço de direções para redes neurais. Depois será mostrado que ela satisfaz os 3 ítens requeridos pela Definição 10.

Ao se trabalhar com redes neurais é suficiente considerar o tempo como discreto para determinar o comportamento da rede. Seja, então, $D_1 = \{t_1, t_2, t_3, \cdots, t_m\}$ um conjunto do tempo linearmente ordenado por $\leq$. Como existe apenas um conjunto de direção. $\mathcal{D} = D_1$. Assim, Ω é o conjunto de todas as trajetórias sobre $\mathcal{D} = \{t_1, t_2, t_3, \cdots, t_m\}$. Então, tem-se:

(a) W, A, $\Theta \in E'$ são conjuntos de variáveis do sistema (Proposição 1).

(b) $F \in R'$ e $F = \{F_W, F_A, F_\Theta\}$ é um conjunto de relações comportamentais globais (Proposição 4).

(c) $F = \{F_W, F_A, F_\Theta\}$ é um conjunto de relações comportamentais globais. Para cada F_i uma relação ρ_i entre Ω e $\mathcal{P}(F_i)$ é definida:

$\rho_W \subset \Omega \times \mathcal{P}(F_W)$ tal que para cada par $[(T, \leq), B_W] \in \rho_W$, existe um mapeamento $\phi_W : T \rightarrow B_W$.

$\rho_A \subset \Omega \times \mathcal{P}(F_A)$ tal que para cada par $[(T, \leq), B_A] \in \rho_A$, existe um mapeamento $\phi_A : T \rightarrow B_A$.

$\rho_\Theta \subset \Omega \times \mathcal{P}(F_\Theta)$ tal que para cada par $[(T, \leq), B_\Theta] \in \rho_\Theta$, existe um mapeamento $\phi_\Theta : T \rightarrow B_\Theta$.

Assim as tres condições para um sistema ser dinâmico foram satisfeitas. Então, uma rede neural bem formada é um sistema normal dinâmico como se pretendia demonstrar.

Ao representar uma rede neural bem formada como um sistema normal dinâmico, $\mathcal{NN} = (E', C, F, \Omega, \rho)$, existem algumas de suas características que podem ser facilmente identificadas.

A relação de conexão C representa a estrutura ou padrão de conectividade da rede. Existem várias propriedades que podem ser extraídas analisando apenas a estrutura da rede. Como por exemplo, determinar o *fan-in* (número de entradas) e o *fan-out* (número de neurônios que serão estimulados por esta saída) para o neurônio n_j; classificar os neurônios em tres tipos: entrada, saída e escondidos; identificar conexões retroativas (feedback); identificar modelos de redes com arquitetura de multicamadas; e outras. A presença ou não de tais propriedades dentro da relação C irá determinar diferentes tipos de arquiteturas.

O fato de uma rede neural ser um sistema normal dinâmico sugere que as variáveis do sistema irão assumir valores diferentes. Qualquer mudança no valor de uma variável resulta em um novo estado e uma nova configuração da rede. O comportamento da rede é, então, analisado através da função ρ, conforme definição de sistema dinâmico.

4 Conclusão

Este artigo apresentou uma proposta de formalização em redes neurais. Partiu-se da análise dos diferentes modelos existentes com objetivo de identificar os componentes e relações que fossem comuns entre eles. Identificados os elementos canônicos, trabalhou-se numa representação matemática que pudesse expressar a natureza e comportamento destes elementos e seus relacionamentos. Resultou disto um modelo geral que foi experimentado na descrição de alguns paradigmas de redes neurais. Este modelo descreve uma rede a nível de neurônio, arquitetura, aprendizagem e modo de operação, apresentando um aspecto temporal. Tendo concebido o modelo, foi apresentada a equivalência das redes neurais bem formadas com sistemas normais dinâmicos. A partir desta equivalência foi possível trazer algumas propriedades encontradas na teoria geral de sistemas para sistemas neurais. A adequabilidade de representar redes neurais bem formadas como sistemas normais dinâmicos fortaleceu o modelo de especificação formal para redes neurais, MOFEU.

É importante ressaltar que a universalidade do modelo proposto ainda nao foi provada. Os exemplos construídos fornecem uma boa espectativa de que o modelo seja universal. Entratanto, para provar tal propriedade é necessário utilizar o modelo na descrição de outros paradigmas de redes neurais e, possivelmente, adaptá-lo mediante algumas necessidades de especificação mais genéricas. A denominação *universal* está presente para destacar a intencionalidade do modelo, o qual foi elaborado tendo em vista uma grande variedade de paradigmas em redes neurais.

Como perspectiva futura para este trabalho está a possibilidade de se ter uma ferramenta genérica de análise do comportamento dos modelos de redes neurais através da sua animação a partir de uma especificação dada. O MOFEU é o ponto de partida para a realização deste objetivo.

References

[1] I Aleksander. Adaptive pattern recognition systems and boltzmann machines: A rapprochement. *Pattern Recognition Letters*, 6:113–120, 1987.

[2] Mario Bunge. *Teoria e Realidade*. Perspectiva, 1974.

[3] Antonio Caselles. Structure and Behavior in General Systems Theory. *Cybernetics and Systems*, 23:549–560, 1992.

[4] E Fiesler and H. John Caulfield. Neural network formalization. Technical report, Institut Dalle Molle d'Intelligence Artificille Perceptive, Suisse, 1992.

[5] E C D B C Filho, D L Bisset, and M C Fairhurst. A goal seeking neuron for Boolean neural networks. In *Proc. International Neural Networks Conference*, volume 2, pages 894–897, Paris, France, July 1990. IEEE.

[6] S Grossberg. Adaptive pattern classification and universal recoding: Ii. feedback, expectation, olfaction, illusions. *Biological Cybernetics*, 23:187–202, 1976.

[7] J J Hopfield. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proc Natl Acad Sci USA*, 81:3088–3092, May 1984.

[8] Shun ichi Amari. Mathematical Theory of Neural Learning. *New Generation Computing*, 8:281–294, 1991.

[9] Paul Krause and Andrzej Glowinski. Formal Specifications and Medical Decision Support Systems. *Applied Artificial Intelligence*, 7:237–256, 1993.

[10] W S McCulloch and W H Pitts. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bull Math Biophys*, 5:115–133, 1943. formal neuron.

[11] M Minsky and S Papert. *Perceptrons*. MIT Press, Cambridge, 1969.

[12] D. A. Santos. E. C. D. B. C. Filho, M. M. C. Costa, and B. M. Acioly. Um Modelo Formal de Especificação de Redes Neurais. In *XIX Latinoamerican Informatics Conference 22 JAIIO PANEL'93*. volume 3, chapter 13, pages 237–246. Buenos Aires, August 1993.

[13] Débora Abdalla Santos. Um MOdelo Formal de Especificação Universal para Redes Neurais – MOFEU. Master's thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Informática, 1993.

[14] Débora Abdalla Santos and Edson Costa de B. C. Filho. Equivalência de Redes Neurais Bem Formadas e Sistemas Normais Dinâmicos. A ser publicado nos anais da XX Conferência Latinoamericana de Informática, Atizapan de Zaragoza, Mexico, September 1994.