Modificação Robusta que Assegura Convergência Assintótica em Problemas de Identificação Neural

José A. Ruiz Vargas[1] e Elder M. Hemerly[2]
Departamento Sistemas e Controle, Instituto Tecnológico de Aeronáutica
12228-900 São José dos Campos, São Paulo, Brasil
E-mails: [1]vargas@ieee.org, [2]hemerly@ita.br.

Abstract

In this paper we propose a robust adaptive law to the weights of linearly parameterized neural networks to ensure that the estimation errors are all bounded. In addition, the state error converges asymptotically to zero, even in the presence of approximation errors and bounded disturbances.

1. Introdução

Uma revisão da literatura nacional sobre identificação e controle baseados em redes neurais artificiais exibe a seguinte peculiaridade: a maior parte dos trabalhos são de natureza heurística, uma vez que não são providenciados resultados teóricos sobre convergência e estabilidade. Para maiores detalhes vide, por exemplo, os anais do CBA 2004 - XV Congresso Brasileiro de Automática e SBAI 2003 – VI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente.

Quanto à literatura internacional, ela é vasta e há vários grupos investigando o problema. Os principais trabalhos asseguram, via uma análise de estabilidade, a convergência do erro de estimação, no caso de identificação, e rastreamento, no caso do controle, para um conjunto residual cujo raio é proporcional, tipicamente, aos erros de aproximação. Como exemplos podem ser citados [1]-[4], onde é provado que os erros de estimação são limitados para entradas limitadas, e [5]-[9], onde se assegura a limitação do erro de rastreamento e de outros sinais em malha fechada. Contudo, não existem algoritmos de controle baseados em identificação neural que permitam assegurar a convergência do erro de rastreamento para zero, na presença de erros de aproximação e distúrbios limitados.

O cenário anterior (literatura nacional principalmente heurística e internacional carente de convergência assintótica) motivou a proposição de um algoritmo para identificação baseado em redes neurais parametrizáveis linearmente (RNAPLs) que assegura convergência assintótica do erro de estado para zero, inclusive na presença de incertezas [10]. Embora relevante do ponto de vista de identificação, há uma deficiência no que se refere ao controle, devido à peculiaridade do modelo do observador empregado.

Neste artigo, motivado pelos fatos prévios, propõe-se um esquema para identificação neural de sistemas incertos que, similarmente a [10], assegura a convergência assintótica para zero do erro de estado na presença de incertezas. Entretanto, ao invés de [10], a metodologia de projeto proposta também pode ser empregada em observação e controle com realimentação da saída, uma vez que o modelo para identificação é agora convenientemente escolhido com esta finalidade. A lei de adaptação para os pesos utilizada, oriunda da análise de estabilidade, emprega um "*leakage gain*" dinâmico para elevar o desempenho e garantir a convergência assintótica, ao contrário das modificações robustas usualmente empregadas na literatura [1] e [11]-[16], enquanto o erro de estimação dos pesos permanece limitado. Prova-se que o "*leakage gain*" converge para o ideal, que é convenientemente definido como uma função limitadora [17]. A convergência do erro de estimação dos pesos também foi examinada e prova-se que convergem para uma bola em torno da origem, cujo raio depende dos parâmetros de projeto. É conveniente ressaltar que modificações robustas as quais asseguram a convergência assintótica para zero do erro de estado na presença de incertezas são inexistentes na literatura.

As principais contribuições deste trabalho incluem:

a) Desenvolvimento de uma metodologia para identificação, de sistemas não-lineares incertos, com convergência assintótica do erro de estado na presença de incertezas, a mesma que pode ser empregada naturalmente em controle adaptativo;

b) Introdução de uma nova modificação robusta para a lei de adaptação dos pesos, a qual assegura, ao contrário das modificações robustas usualmente empregadas [1] e [11]-[15], a convergência do erro de estado para zero na presença de incertezas, como erro de modelagem e distúrbios. Estendendo desta forma o estado da arte em identificação neural e, em particular, da estimação *on-line* de sistemas lineares sujeitos a distúrbios, pois a metodologia proposta também pode ser empregada (sem uso de RNAs), como em [16], para sistemas lineares.

2. Formulação do problema

Considere a classe de sistemas não-lineares genéricos representados por

$$\dot{x} = F(x,u,v,t) \tag{1}$$

onde $x \in X$ é o vetor de estados de dimensão *n*, $u \in U$ é um vetor de entradas admissíveis de dimensão *m*, $v \in V \subset \Re^q$ é um vetor (variante no tempo) de variáveis incertas, $F : X \times U \times V \times [0,\infty) \mapsto \Re^n$ é um mapeamento contínuo desconhecido. Com a finalidade de ter o problema bem colocado, assuma que X, U, V são conjuntos compactos e F é Lipschitz localmente com respeito a *x* em $X \times U \times V \times [0,\infty)$, tal que (1) tem uma única solução passando por $x(0)$.

Hipótese 1: Na região $X \times U \times V \times [0,\infty)$

$$\|h(x,u,v,t)\| \le h_0 \tag{2}$$

onde

$$h(x,u,v,t) = F(x,u,v,t) - f(x,u) \tag{3}$$

f é um mapeamento desconhecido, $\|\cdot\|$ é a norma Euclideana e $h_o \ge 0$ é um limitante desconhecido.

Portanto, excetuando-se a hipótese 1, considera-se que $F(x,u,v,t)$ é um mapeamento desconhecido que se pretende identificar, usando-se os vetores de entrada e controle, o qual será realizado apesar da presença de incertezas.

3. Redes neurais parametrizáveis linearmente

As RNAPLs podem ser expressas matematicamente como

$$\rho(W,\zeta) = W\pi(\zeta) \tag{4}$$

onde $W \in \Re^{n \times L}$, $\zeta \in \Re^{n+m}$, e $\pi : \Re^{n+m} \mapsto \Re^L$ é um vetor de funções básicas que pode ser considerado como uma função vetorial não-linear, cujos argumentos são pré-processados por uma função escalar $s(\cdot)$. As funções escalares $s(\cdot)$ usualmente utilizadas incluem sigmoide, tanh, gaussiana, *Hardy's*, *inverse Hardy's multiquadratic*, etc. Para maiores detalhes vide [12] e [18]. Entretanto, nesta trabalho estamos interessados somente na classe de RNAPLs nas quais $s(\cdot)$ é limitado, uma vez que neste caso tem-se,

$$\|\pi(\zeta)\| \le \pi_0 \tag{5}$$

sendo π_0 uma constante estritamente positiva.

A classe de RNAPLs consideradas nesta seção inclui redes neurais de alta ordem (HONNs) [12], *radial basis function networks* (RBFNNs) [19], *wavelet networks* [20], e também outros aproximadores parametrizáveis linearmente como *Takagi-Sugeno fuzzy systems* [21], os quais satisfazem a propriedade de aproximação universal:

(P1*)* Para qualquer função $f \in C[\Omega]$ e $\varepsilon_0 > 0$, existe uma função vetorial $f^* = W^* S(\zeta)$, onde W^* é uma matriz "ótima" e L é um inteiro suficientemente grande, tal que,

$$sup_{\zeta \in \Omega} \left| f(\zeta) - W^* S(\zeta) \right| \le \varepsilon_0 \tag{6}$$

onde $C[\Omega]$ denota o espaço de funções contínuas definidas em um domínio compacto $\Omega \subset \Re^n$, $|\cdot|$ denota o valor absoluto se o argumento é um escalar. Se o argumento é uma função vetorial em $\Re^n$ então $|\cdot|$ denota qualquer norma em $\Re^n$ [11].

4. Modelo para identificação e equação do erro de estado

Nesta seção são introduzidos o modelo para identificação e as equações de erro relevantes associados ao problema.

Defina $\bar{f}$ como sendo a melhor aproximação conhecida de *f*, $B \in \Re^{n \times n}$ como uma matriz diagonal $B = diag(b_i)$ tal que $b_i \ne 0$, $\bar{g} = B^{-1} g$ e $g(x,u) = f(x,u) - \bar{f}(x,u)$. Então, somando e subtraindo $\bar{f}(x,u)$, (1) pode ser reescrita como

$$\dot{x} = \bar{f}(x,u) + B\bar{g}(x,u) + h(x,u,v,t) \tag{7}$$

Comentário 1: Note que quando não se tem nenhum conhecimento prévio sobre *f*, então $\bar{f}$ é simplesmente assumida como sendo o vetor nulo.

Com base em (6), usando-se RNAPLs, o mapeamento $\bar{g}(x,u)$ pode ser substituído por $W^* \pi(x,u)$ mais um termo de erro de aproximação $\varepsilon(\chi,u)$. Mais exatamente, (7) pode ser escrita como

$$\dot{x} = \bar{f}(x,u) + BW^* \pi(x,u) + B\varepsilon(x,u) + h(x,u,v,t) \tag{8}$$

onde $W^* \in \Re^{nxL}$ é uma matriz "ótima", requerida somente para propósitos analíticos, que pode ser definida como

$$W^* := \underset{\hat{W} \in \Gamma}{arg\,min} \left\{ \sup_{\substack{x \in X, \\ u \in U}} \left| \bar{g}(x,u) - \hat{W}\pi(x,u) \right| \right\} \tag{9}$$

com $\Gamma = \left\{ \hat{W} \;\middle|\; \|\hat{W}\| \le \alpha_{\hat{W}} \right\}$, $\alpha_{\hat{W}}$ é uma constante estritamente positiva, que depende da lei de ajuste dos parâmetros, $\hat{W}$ é uma estimação de W^* e $\varepsilon(x,u)$ é o erro de aproximação, correspondente a W^*, que pode ser definido como

$$\varepsilon(x,u) := \bar{g}(x,u) - W^* \pi(x,u) \tag{10}$$

O erro de aproximação, reconstrução ou modelagem ε é uma grandeza que surge devido à incapacidade da RNAPL de reproduzir exatamente $\bar{g}(x,u)$. Uma vez que X, U são conjuntos compactos e usando-se (5), na região $X \times U$ tem-se

$$\|\varepsilon(x,u)\| \le \varepsilon_0 \tag{11}$$

onde $\varepsilon_0 \ge 0$ é um limitante desconhecido.

Comentário 2: Note que W^* e $\varepsilon(x,u)$ podem não ser únicos. Entretanto, $\|\varepsilon(x,u)\|$ é único devido a (9).

Comentário 3: Convém ressaltar que W^* foi definido como o $\hat{W}$ que minimiza a norma L_∞ da subtração entre $\bar{g}(x,u)$ e $\hat{W}\pi(x,u)$. Conseqüentemente, a matriz de escalonamento B em (7) foi introduzida para manipular a grandeza de $\bar{g}(x,u)$, e então de $\|W^*\|_F$, uma vez que qualquer incremento de $|b_i|$ implica que o correspondente $|\bar{g}_i(x,u)|$ diminui e, eventualmente, por (9), que $\|W^*\|_F$ diminui também.

A estrutura (8) sugere um modelo para identificação da forma

$$\dot{\hat{x}} = \bar{f}(x,u) + B\hat{W}\pi(\xi,u) - L(\hat{x} - x) \tag{12}$$

onde $L \in \Re^{n \times n}$ é uma matriz de ganho de realimentação positiva definida introduzida para atenuar o efeito de incertezas e condição inicial $x(0)$ não nulas. Na próxima seção será mostrado que o modelo para identificação (12) usado conjuntamente com uma lei de adaptação para $\hat{W}$, convenientemente definida a seguir, assegura a convergência assintótica do erro de estado para zero na presença de erros de aproximação e incertezas.

Comentário 4: Uma deficiência usual de modelos para identificação, baseados em RNAs, consiste na sua inadequação para predição, devido a que seus pesos não podem convergir para os "ótimos" e, então, tais modelos somente podem trabalhar *on-line* [1]. O modelo para identificação proposto (12) também possui esta deficiência. Contudo, similarmente a outros modelos baseados em RNAs, é relevante para controle baseado em identificação. Além disso, a parametrização (12) permite obter modelos de erro que serão usados a seguir na prova de estabilidade.

Definindo-se o erro de estimação do estado (ou simplesmente o erro de estado) como $\tilde{x} := \hat{x} - x$, a partir de (8) e (12), pode-se obter a equação do erro de estado

$$\dot{\tilde{x}} = -L\tilde{x} + B\tilde{W}\pi(\xi,u) + BW^*\omega(\xi,u) - B\varepsilon(x,u) - h(x,u,v,t) \tag{13}$$

onde $\tilde{W} := \hat{W} - W^*$ e $\omega(\xi,u) = \pi(\xi,u) - \pi(x,u)$ é um termo de distúrbio limitado. Mais exatamente, com base em (5), tem-se

$$\|\omega(\xi,u)\| \le \omega_0 \tag{14}$$

para algum limitante desconhecido ω_0.

Comentário 5: Note que quaisquer $\bar{\pi}_0 > \pi_0$, $\bar{h}_0 > h_0$, $\bar{\varepsilon}_0 > \varepsilon_0$ e $\bar{\omega}_0 > \omega_0$ também satisfazem (5), (2), (11) e (14). Conseqüentemente, para evitar qualquer confusão, defina π_0, h_0, ε_0 e ω_0 como sendo as menores constantes tal que (5), (2), (11) e (14) sejam satisfeitas.

5- Leis de adaptação para os pesos e análise de estabilidade

Uma vez que já foi apresentado o modelo para identificação, como também a equação do erro de estado, o próximo passo é a escolha de leis adaptativas para os pesos que assegurem propriedades desejadas de convergência e estabilidade. Tipicamente, na literatura [1] e [11]-[15], isto é realizado com base na análise de estabilidade, via um processo de aumento [17], onde a equação de erro previamente determinada é utilizada. Desta forma, a lei de adaptação para os pesos é selecionada para fazer $\dot{V}$, a derivada em relação ao tempo de uma candidata a função de Lyapunov V, negativa semidefinida fora de uma bola em torno da origem, cujo raio é proporcional a um limitante superior dos erros de aproximação. Entretanto, este procedimento somente assegura estabilidade prática, devido à presença inevitável de erros de aproximação. Nesta seção é removida a deficiência supracitada, mediante o uso de um "*leakage gain*" dinâmico, para se fazer $\dot{V}$ negativa semidefinida em todo o espaço dos erros. Convém ressaltar que esta escolha é motivada pelo fato de que "*leakage gains*" dinâmicos podem ser considerados como funções limitadoras, usando a terminologia em [17], e conseqüentemente podem ser utilizados para se dominar termos positivos em $\dot{V}$, o que melhora o desempenho. ´Convém mencionar que "*leakage gains*" dinâmicos têm sido utilizados previamente em [22] e [15], onde foram estudados controle adaptativo robusto de sistemas lineares e identificação de sistemas incertos, respectivamente.

Para a prova do resultado principal é necessário o lema a seguir:

Lema1: Considere $\dot{\rho} = -\gamma_\rho \left(\rho_1 \rho - \rho_2 \left\| \hat{W} - W_0 \right\|_F^2 - \rho_3 \right)$ onde $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \gamma_\rho > 0$. Então,

(a) Se $\rho(0) > 0$**,** tem-se $\rho(t) > 0$ para todo $t \geq 0$.

(b) Se $\rho(0) > \rho_3 / \rho_1$, tem-se $\rho(t) > \rho_3 / \rho_1$ para todo $t \geq 0$.

Prova: Com base em [16], tem-se

$$\rho(t) = exp(-\gamma_\rho \rho_1 t)\rho(0) + \gamma_\rho \int_0^t exp[-\gamma_\rho \rho_1 (t-\tau)] \left[\rho_3 + \rho_2 \left\| \hat{W}(\tau) - W_0 \right\|_F^2 \right] d\tau$$

donde seguem (a) e (b). □

O resultado principal é apresentado na seqüência.

Teorema 1: Considere a classe de sistemas não-lineares genéricos descritos por (1), satisfazendo a Hipótese 1, o modelo para identificação (12), e as leis adaptativas,

$$\dot{\hat{W}} = -\gamma_W \left[(2C\hat{\psi} - \alpha_2 I)\left(\hat{W} - W_0\right) + BK\tilde{x}\pi^T(\xi, u) \right] \quad (15)$$

$$\dot{\hat{\psi}} = -\gamma_\psi \left(2\alpha_1 \hat{\psi} - \alpha_2 \left\| \hat{W} - W_0 \right\|_F^2 - \alpha_1 \right) \quad (16)$$

Se

$$\alpha_2 \leq c_{i\,min} \quad (17)$$

$$\hat{\psi}(0) > 1/2 \quad (18)$$

$$\alpha_3 > 1/2 \quad (19)$$

$$\alpha_1 > c_{i\,max} \left(\sqrt{2} - 1 \right)^{-1} \left\| W^* - W_0 \right\|_F^2 \quad (20)$$

$$\left\| W_0 \right\|_F \geq \sqrt{\frac{2\alpha_1}{\alpha_2}} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\alpha_4^2 \left\| KB \right\|_F^2}{2\alpha_1} + \frac{\alpha_2 I^* \left[2tr\left(W^{*T} W_0\right) - \left\| W^* \right\|_F^2 \right]}{2\alpha_1} \right\} \quad (21)$$

Então,

(i) $lim_{t \to \infty} \tilde{x}(t) = 0$ e $lim_{t \to \infty} \tilde{\psi}(t) = 0$.

(ii) $\tilde{W}(t)$ converge para o conjunto residual $D = \left\{ \tilde{W} \;\middle|\; \left\| \tilde{W} \right\|_F \leq \gamma \left\| W^* - W_0 \right\|_F \right\}$, para algum $\gamma > 0$.

onde $\gamma_W, \gamma_\psi, \alpha_2 > 0$, $C \in \Re^{n \times n}$, $C = diag(c_i)$, $c_i > 0$, $c_{i\,max} = max\{c_i\}$, $c_{i\,min} = min\{c_i\}$, $W_0 \in \Re^{n \times L}$, I é uma matriz identidade de dimensões apropriadas, $K = P^T + P$, $P > 0$, $\alpha_3 = \lambda_{min}(Q)$ é o mínimo autovalor de uma matriz positiva definida *Q*, que é a solução da equação de Lyapunov $L^T P + PL = Q$,

$$\alpha_4 = \left\| W^* \right\|_F \overline{\omega}_0 + \bar{\varepsilon}_0 + \left\| B^{-1} \right\|_F \bar{h}_0, \quad I^* = \begin{cases} 0 & se \;\; tr\left(W^{*T} W_0\right) > \dfrac{\left\| W^* \right\|_F^2}{2} \\ 1 & caso\ contrário \end{cases}$$

e $\left\| \cdot \right\|_F$ é a norma de Frobenius.

Prova: Considere a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V = \tilde{x}^T P \tilde{x} + tr\left(\tilde{W}^T \gamma_W^{-1} \tilde{W}\right)/2 + \tilde{\psi}\, \gamma_\psi^{-1} \tilde{\psi}/2 \quad (22)$$

onde $\tilde{\psi} = \hat{\psi} - \psi^*$ e $tr(\cdot)$ é o operador traço.

Derivando-se (22) em relação ao tempo, obtém-se

$$\dot{V} = \dot{\tilde{x}}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \dot{\tilde{x}} + tr\left(\tilde{W}^T \gamma_W^{-1} \dot{\tilde{W}} \right) + \tilde{\psi} \gamma_\psi^{-1} \dot{\tilde{\psi}} \quad (23)$$

Substituindo-se (13), (15) e (16) em (23), advém

$$\begin{aligned} \dot{V} = &-\tilde{x}^T Q \tilde{x} + \tilde{x}^T K \left(BW^* \omega - B\varepsilon - h \right) \\ &- 2\hat{\psi}\; tr\left[\tilde{W}^T C \left(\hat{W} - W_0 \right) \right] + \alpha_2 t_r \left[\tilde{W}^T \left(\hat{W} - W_0 \right) \right] \\ &- 2\alpha_1 \tilde{\psi} \hat{\psi} + \alpha_2 \left\| \hat{W} - W_0 \right\|_F^2 \tilde{\psi} + \alpha_1 \tilde{\psi} \end{aligned} \quad (24)$$

onde $tr\left(\tilde{W}^T BK\tilde{x}\pi^T \right) = \tilde{x}^T KB\tilde{W}\pi$, o que foi obtido empregando-se uma propriedade simples do traço.

Por outro lado, note que $\left\| \overline{C}\left(W^* - W_0\right) \right\|_F^2 = \left\| \overline{C}\tilde{W} - \overline{C}\left(\hat{W} - W_0\right) \right\|_F^2$, então usando-se a definição de norma de Frobenius [18], decorre

$$\begin{aligned} &2tr\left[\tilde{W}^T C \left(\hat{W} - W_0 \right) \right] = \\ &\left\| \overline{C}\tilde{W} \right\|_F^2 + \left\| \overline{C}\left(\hat{W} - W_0\right) \right\|_F^2 - \left\| \overline{C}\left(W^* - W_0\right) \right\|_F^2 \end{aligned} \quad (25)$$

onde $\overline{C}^T \overline{C} = C$. Portanto, escolhendo-se $\overline{C}$ como uma matriz diagonal, (25) implica

$$\begin{aligned} &2tr\left[\tilde{W}^T C \left(\hat{W} - W_0 \right) \right] \geq \\ &c_{i\,min} \left\| \tilde{W} \right\|_F^2 + c_{i\,min} \left\| \hat{W} - W_0 \right\|_F^2 - c_{i\,max} \left\| W^* - W_0 \right\|_F^2 \end{aligned} \quad (26)$$

Também, usando-se $(\tilde{\psi} - \hat{\psi})^2 = \tilde{\psi}^2 - 2\tilde{\psi}\hat{\psi} + \hat{\psi}^2$, advém

$$2\tilde{\psi}\hat{\psi} = \tilde{\psi}^2 + \hat{\psi}^2 - {\psi^*}^2 \quad (27)$$

Note que $\hat{\psi}(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, devido ao Lema 1-(a) e (18). Conseqüentemente, usando (17), (26) e (27) em (24), e uma vez que $-\hat{\psi} + \tilde{\psi} = -\psi^*$ e $\tilde{W} = \hat{W} - W^*$, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq &-\alpha_3 \left\| \tilde{x} \right\|^2 - \alpha_2 \hat{\psi} \left\| \tilde{W} \right\|_F^2 - \alpha_2 \psi^* \left\| \hat{W} - W_0 \right\|_F^2 - \alpha_2 tr\left(\hat{W}^T W_0 \right) \\ &+ \alpha_2 tr\left(\tilde{W}^T \hat{W} \right) + \alpha_4 \left\| KB \right\|_F \left\| \tilde{x} \right\| + c_{i\,max} \hat{\psi} \left\| W^* - W_0 \right\|_F^2 \\ &+ \alpha_2 tr\left(W^{*T} W_0 \right) - \alpha_1 \left(\tilde{\psi}^2 + \hat{\psi}^2 - {\psi^*}^2 \right) + \alpha_1 \tilde{\psi} \end{aligned} \quad (28)$$

Adicionalmente, efetuando uma manipulação simples, tem-se,

$$2\alpha_4 \|KB\|_F \|\tilde{x}\| \le \alpha_4^2 \|KB\|_F^2 + \|\tilde{x}\|^2 \qquad (29)$$

que sendo usada em (28), implica

$$\begin{aligned}\dot{V} \le & -\alpha_5\|\tilde{x}\|^2 - \alpha_2\hat{\psi}\|\tilde{W}\|_F^2 - \alpha_2\psi^*\|\hat{W} - W_0\|_F^2 \\ & -\alpha_2 tr\left(\hat{W}^T W_0\right) + \alpha_2 tr\left(\tilde{W}^T \hat{W}\right) + \alpha_2 \|W^*\|_F^2 / 2 \\ & + \alpha_1\left\{1/2 + \alpha_4^2\|KB\|_F^2/(2\alpha_1) + \alpha_2 I^*\left[2tr\left(W^{*T}W_0\right) - \|W^*\|_F^2\right]/(2\alpha_1)\right\} \\ & -\alpha_1\left(\tilde{\psi}^2 + \hat{\psi}^2 - \psi^{*2}\right) + \alpha_1\tilde{\psi} + c_{i\,max}\|W^* - W_0\|_F^2\hat{\psi} - \alpha_1/2\end{aligned} \qquad (30)$$

onde $\alpha_5 = \alpha_3 - 1/2$, e foi adicionado e subtraído $\alpha_1/2 + \alpha_2\|W^*\|_F^2/2$.

Conseqüentemente, definindo-se

$$\psi^* := \frac{1}{2} + \frac{\alpha_4^2\|KB\|_F^2}{2\alpha_1} + \frac{\alpha_2 I^*\left[2tr\left(W^{*T}W_0\right) - \|W^*\|_F^2\right]}{2\alpha_1} \qquad (31)$$

segue que $\psi^* > 1/2$, e uma vez que $\psi^* + \tilde{\psi} = \hat{\psi}$, (30) implica

$$\begin{aligned}\dot{V} \le & -\alpha_5\|\tilde{x}\|^2 - \alpha_2\hat{\psi}\|\tilde{W}\|_F^2 - \alpha_2\|\hat{W} - W_0\|_F^2/2 \\ & -\alpha_2 tr\left(\hat{W}^T W_0\right) + \alpha_2 tr\left(\tilde{W}^T\hat{W}\right) + \alpha_2\|W^*\|_F^2/2 \\ & -\alpha_1\left(\tilde{\psi}^2 + \hat{\psi}^2 - \psi^{*2}\right) + \alpha_6\hat{\psi} - \alpha_1/2\end{aligned} \qquad (32)$$

onde $\alpha_6 = \alpha_1 + c_{i\,max}\|W^* - W_0\|_F^2$.

Note também que

$$\|\hat{W} - W_0\|_F^2 = \|\hat{W}\|_F^2 + \|W_0\|_F^2 - 2tr\left(\hat{W}^T W_0\right) \qquad (33)$$

Logo, usando-se (33) em (32), e completando-se o quadrado, advém

$$\begin{aligned}\dot{V} \le & -\alpha_5\|\tilde{x}\|^2 - \alpha_2\hat{\psi}\|\tilde{W}\|_F^2 - \alpha_2\left(\|\hat{W}\|_F^2 + \|W_0\|_F^2\right)/2 \\ & + \alpha_2 tr\left(\tilde{W}^T\hat{W}\right) + \alpha_2\|W^*\|_F^2/2 \\ & -\alpha_1\left(\tilde{\psi}^2 - \psi^{*2}\right) - \alpha_1[\hat{\psi} - \alpha_6/(2\alpha_1)]^2 + \alpha_6^2/(4\alpha_1) - \alpha_1/2\end{aligned} \qquad (34)$$

que implica, usando-se (18) e o Lema 1-(b),

$$\begin{aligned}\dot{V} \le & -\alpha_5\|\tilde{x}\|^2 - \alpha_2\|\tilde{W}\|_F^2/2 - \alpha_2\|\hat{W}\|_F^2/2 - \alpha_1\tilde{\psi}^2 \\ & + \alpha_2 tr\left(\tilde{W}^T\hat{W}\right) + \alpha_2\|W^*\|_F^2/2 + V_0\end{aligned} \qquad (35)$$

onde $V_0 = \alpha_6^2/(4\alpha_1) - \alpha_1/2 - \alpha_2\|W_0\|_F^2/2 + \alpha_1\psi^{*2}$.

Uma vez que $2tr\left(\tilde{W}\hat{W}\right) = \|\tilde{W}\|_F^2 + \|\hat{W}\|_F^2 - \|W^*\|_F^2$, então (35) resulta

$$\dot{V} \le -\alpha_5\|\tilde{x}\|^2 - \alpha_1\tilde{\psi}^2 + V_0 \qquad (36)$$

Note agora, com base em (20) e (21), que $\alpha_1^2 > \alpha_6^2/2$ e $\|W_0\|_F^2 \ge 2\alpha_1\psi^{*2}/\alpha_2$, respectivamente. Portanto, devido a $V_0 < 0$, (36) implica

$$\dot{V} < -\alpha_5\|\tilde{x}\|^2 - \alpha_1\tilde{\psi}^2 \qquad (37)$$

Uma vez que V é limitada inferiormente e não crescente com o tempo, (37) implica

$$lim_{t\to\infty}\int_0^t \left(\alpha_5\|\tilde{x}\|^2 + \alpha_1\tilde{\psi}^2\right)d\tau < V(0) - V_\infty < \infty \qquad (38)$$

onde $lim_{t\to\infty} V(t) = V_\infty < \infty$. Note ainda que $\|\tilde{x}\|^2$ e $\tilde{\psi}^2$ são uniformemente contínuas, uma vez que $\tilde{x}, \tilde{W}, \hat{W}, \hat{\psi}, \varepsilon, \omega$ e h são limitadas e, com base em (13) e (16), segue que $\dot{\tilde{x}}$ e $\dot{\tilde{\psi}}$ são também limitadas. Portanto, aplicando o lema de Barbalat [16], conclui-se que $lim_{t\to\infty}\tilde{x}(t) = 0$ e $lim_{t\to\infty}\tilde{\psi}(t) = 0$.

Com base em (15), a equação do erro dos pesos pode ser expressa como

$$\dot{\tilde{W}} = -\gamma_W\left[\Gamma\tilde{W} + \Gamma\left(W^* - W_0\right) + BK\tilde{x}\pi^T\right] \qquad (39)$$

onde $\Gamma = 2C\hat{\psi} - \alpha_2 I$ é uma função matricial limitada e positiva definida, devido a que $\hat{\psi}(t)$ é limitado e $\hat{\psi}(t) > 1/2$ para todo $t \ge 0$, como previamente estabelecido. Note que $lim_{t\to\infty}\tilde{W}(t) = 0$ quando $W_0 = W^*$, uma vez que o terceiro termo no colchete em (39) converge para zero.

Para examinar o caso em que $W_0 \ne W^*$, considere a função positiva semidefinida (*Lyapunov-like*)

$$V_W = \gamma_W^{-1} tr\left(\tilde{W}^T\tilde{W}\right)/2 \qquad (40)$$

Derivando-se (40) em relação ao tempo, e usando-se (39), (40) implica

$$\dot{V}_W \le -\|\tilde{W}\|_F\left(\gamma_{inf}\|\tilde{W}\|_F - \gamma_{sup}\|W^* - W_0\|_F - \bar{\pi}_0\|KB\|_F\|\tilde{x}\|\right) \qquad (41)$$

onde $\gamma_{inf} = inf_{t\ge0}\{2c_i\hat{\psi} - \alpha_2\,;\, i = 1,2,..,n\}$ e $\gamma_{sup} = sup_{t\ge0}\|2C\hat{\psi} - \alpha_2 I\|_F$.

Conseqüentemente, $\dot{V}_W < 0$ sempre que

$$\|\tilde{W}(t)\|_F > \gamma_{sup}\|W^* - W_0\|_F/\gamma_{inf} + \bar{\pi}_0\|KB\|_F\|\tilde{x}(t)\|/\gamma_{inf} \qquad (42)$$

onde o segundo termo no lado direito de (42) é uma perturbação que converge para zero. Portanto, pode-se concluir, usando argumentos usuais de Lyapunov, que existe um tempo finito $t_W \ge 0$, tal que $\tilde{W}(t)$ converge para uma bola em torno da origem cujo raio é menor ou igual a $\gamma\|W^* - W_0\|_F$, onde $\gamma > \gamma_{sup}/\gamma_{inf}$. □

Comentário 6: Note que as condições (20) e (21) não podem ser verificadas *a priori*, uma vez que em (20) e

(21) são desconhecidos os pesos “ótimos” e limitantes para os erros de aproximação e distúrbios. Contudo, esta deficiência não é peculiar unicamente ao esquema proposto, senão à maioria de modificações robustas. Por exemplo, os trabalhos em [1] e [11]-[15] utilizam a projeção de parâmetros, *switching*-σ e zona-morta, que requerem informação prévia sobre o sistema e erro de modelagem.

Comentário 7: A condição (21) pode ser rescrita como

$$\|W_0\|_F \ge \sqrt{\frac{\alpha_1}{2\alpha_2} + \frac{\alpha_4^2\|KB\|_F^2}{\sqrt{2\alpha_1\alpha_2}} + \beta I^*\left[2tr\left(W^{*T}W_0\right) - \left\|W^*\right\|_F^2\right]} \quad (43)$$

onde $\beta = \alpha_2 \big/ \sqrt{2\alpha_1\alpha_2}$. Note que esta condição pode ser facilmente satisfeita, já que o segundo e terceiro termos no lado direito de (43) podem ser diminuídos, arbitrariamente, aumentando α_1 , α_2 (com igual taxa) e $\|B\|_F$, e reduzindo $\|KB\|_F$, pois neste caso, mais cedo ou mais tarde, β e $\left\|W^*\right\|_F$ diminuem. Convém ressaltar que o incremento de α_1 e α_2 não ocasiona que $2tr\left(W^{*T}W_0\right) - \left\|W^*\right\|_F^2$ cresça, via W_0 , mais rápido que β^{-1} , pois o primeiro termo no lado direito de (43) permanece inalterado. Conseqüentemente, usando-se (20), a condição (43) implica $\|W_0\|_F > \kappa\left\|W^* - W_0\right\|_F$, onde $\kappa = 1.0987\sqrt{c_{i\,max}/\alpha_2}$, que pode ser satisfeito pela seleção adequada de W_0 .

6. Conclusões

Neste artigo foi considerada a identificação de uma classe genérica de sistemas não-lineares incertos usando-se RNAPLs. Foi proposta uma lei de adaptação para os pesos que assegura estabilidade e convergência do erro de estado para zero, inclusive na presença de erros de aproximação e incertezas. Resultados adicionais sobre aplicação da metodologia proposta para observação de estados e controle com realimentação da saída estão em fase de obtenção e serão oportunamente reportados.

7. Referências

[1] W. Yu, A. S. Poznyak, and X. Li, “Multilayer dynamical neural networks for non-linear system on-line identification,” *International Journal of Control*, vol. 74, no.18, pp. 1858-1864, 2001.

[2] W. Yu and X. Li, “Some new results on system identification with dynamic neural networks,” *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 12, pp. 412-417, Feb. 2001.

[3] W. Yu, “Passivity analysis for dynamic multilayer neuro identifier,” *IEEE Trans. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 50, Iss.1, pp. 173-178, Jan. 2003.

[4] W. Yu, “nonlinear system identification using discrete-time recurrent neural networks with stable learning algorithm,” *Information sciences*, vol. 158, pp. 131-137, 2004.

[5] N. Hovakimyan, F. Nardi, and A. J. Calise, “A novel error observer adaptive output feedback approach for control of uncertain systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 8, pp. 1310-1314, 2002.

[6] G. Rovithakis, “Robust redesign of a neural network controller in the presence of unmodeled dynamics,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 15, no. 6, pp. 1482-1490, 2004.

[7] N. Hovakimyan, E. Lavretsky, B. J. Yang, and A. J. Calise, “Coordinated decentralized adaptive output feedback control of Interconnected Systems,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 16, no. 1, pp. 185-194, 2005.

[8] J. A. R. Vargas, “Adaptive neural control of a class of unknown nonlinear systems,” Dr. Sc. thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brazil, 2002.

[9] N. Hovakimyan, F. Nardi, A. J. Calise, and N. Kim, “Adaptive output feedback control of uncertain nonlinear system using single-hidden-layer neural networks,” *IEEE Transaction on Neural Networks*, vol. 13, no. 6, pp. 1420-1431, Nov. 2002.

[10] J.A.R. Vargas, E.M. Hemerly, and V. I. Gervini, “Convergência assintótica do erro de estimação em algoritmos usando aproximadores parametrizáveis linearmente”, Anais do *XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, CD-ROM, setembro 2004.

[11] M. M. Polycarpou and P. A. Ioannou, “Identification and control of nonlinear systems using neural network models: design and stability analysis,” Tech. Rep. 91-09-01, Dept. Elect. Eng. Syst., Univ. Southern Calif., Los Angeles, 1991.

[12] E. B. Kosmatopoulos, M. M. Polycarpou, M. A.Christodoulou, and P. A. Ioannou, “High-order neural network structures for identification of dynamical systems,” *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 6, pp. 442-431, Mar. 1995.

[13] Q. Song, “Robust training algorithms of multilayered neural networks for identification of nonlinear dynamical systems,” *IEE Proc.- Control Theory Appl.*, vol. 145, no. 1, pp. 41-46, 1998.

[14] S. Jagannathan and F. L. Lewis, “Identification of nonlinear dynamical systems using multilayered neural networks, *Automatica*, vol. 32, no. 12, pp. 1707-1712, 1996.

[15] J. A. R. Vargas, “Identificação de sistemas dinâmicos via redes neurais artificiais”, master thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, 1997.

[16] P.A. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

[17] Z. Qu, *Robust control of nonlinear uncertain systems*, Wiley series in nonlinear science, John Wiley & Sons, Inc. 1998.

[18] S. S. Ge, C. C. Hang, T. H. Lee, and T. Zhang, *Stable adaptive neural network control*, Kluwer academic publishers, 2002.

[19] R. M. Sanner and J. J. E. Slotine, “Stable recursive identification using radial basis function networks,” *Proc. 1992 ACC*, Chicago, IL, pp. 1829-1833, June 1992.

[20] Q. Zhang and A. Benveniste, “Wavelet networks,” *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 3, pp. 889-898, 1992.

[21] L. X. Wang, *Adaptive Fuzzy System and Control: Design and Stability Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.

[22] T.Y. Chai and Z. Tao, “A new model reference robust adaptive controller in the presence of unmodeled dynamics and bounded disturbances,” *Automatica*, vol. 30, no. 5, pp. 865-869, 1994.

Agradecimentos

Os primeiro autor agradece à FAPESP, processos 02/13829-9 e 03/11199-0, e o segundo autor agradece ao CNPq/Pronex, processo 662015/1998-3, pelo suporte financeiro.