X Congresso Brasileiro de Inteligência Computacional (CBIC'2011), 8 a 11 de Novembro de 2011, Fortaleza, Ceará

Princípios de Quantização Intervalar

Fabiana T. Santana, Fágner Lemos de Santana
Instituto Federal de Educação, Ciência de Tecnologia do Rio Grande do Norte – IFRN,
Rua Dr. Nilo Bezerra Ramalho, 1692, Tirol, Natal-RN, 59015-300, Brasil. Departamento de Matemática.
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN,
Campus Universitário s/n, Lagoa Nova, Natal-RN, 59072-970, Brazil
fabiana.santana@ifrn.edu.br, fagner@ccet.ufrn.br

Adrião Duarte Dória Neto, Regivan Hugo Nunes Santiago
Departamento de Computação e Automação. Departamento de Informática e Matemática Aplicada.
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN,
Campus Universitário s/n, Lagoa Nova, Natal-RN, 59072-970, Brazil
adriao@dca.ufrn.br, regivan@dimap.ufrn.br

Resumo – Neste trabalho utiliza-se a matemática intervalar e as funções $\underline{R}(x) = \lfloor x/\epsilon \rfloor * \epsilon$ e $\overline{R}(x) = \lceil x/\epsilon \rceil * \epsilon$, as quais realizam arredondamentos direcionados, para estabelecer uma abordagem intervalar para o processo de quantização. Aqui, são introduzidos os conceitos de sinal amostrado intervalar e níveis de quantização intervalares. Sobre os níveis de quantização intervalares, mostra-se que os mesmos representam os níveis de quantização clássicos, são comparáveis segundo a ordem de Kulisch-Miranker e são dois a dois disjuntos. Além disso, verifica-se que um sinal intervalar intercepta no máximo um nível de quantização intervalar, que será o valor do sinal quantizado intervalar. Por fim, é apresentada a definição de codificação intervalar, em que o número de bits necessários depende da quantidade de níveis de quantização.
Palavras-chave – Matemática Intervalar, Representação Intervalar, Amostragem Intervalar, Níveis de Quantização Intervalares, Codificação Intervalar.

Abstract – In this paper we use the interval mathematics and the functions $\underline{R}(x) = \lfloor x/\epsilon \rfloor * \epsilon$ and $\overline{R}(x) = \lceil x/\epsilon \rceil * \epsilon$, which performing directed rounding, to establish an interval approach to the process of quantization. Here, are introduced the concepts of sampled interval signal and interval quantization levels. We show that the interval quantization levels represents the classical quantization levels, are comparable with respect to the Kulisch-Miranker order and are pairwise disjoint. In addition, we show that a signal interval intersects at most one interval level, which is the value of the quantized interval signal. Finally, the definition of interval coding is presented, where the number of bits required depends on the number of quantization levels.
Keywords – Interval mathematics, Interval Representation, Interval Sampling, Interval Quantizations Levels, Interval Coding.

1. INTRODUÇÃO

Problemas de incerteza em dados numéricos no processamento digital de sinais (DSP) ocorre tanto na obtenção do sinal, através de algum instrumento, quanto no processamento dos dados, devido às limitações da aritmética de ponto flutuante. A matemática intervalar possibilita uma alternativa para incorporar estas incertezas no processo de obtenção do sinal e na conversão analógico digital.

Algoritmos baseados em intervalos encontram aplicações em processamento digital de sinais, controle, redes neurais, dentre outras. Em DSP, geralmente se tem a necessidade de encontrar soluções ótimas para problemas, por exemplo minimizar uma função custo. Como foi destacado em [3], as abordagens intervalares de algoritmos são atraentes nesta área pois tem a capacidade de garantir convergências e são projetados de tal forma que os erros de arredondamentos e truncamentos, que ocorrem naturalmente devido a natureza discreta da computação, não faz com que o algoritmo se torne instável. Isto é, os intervalos fornecem um meio de controlar os erros e proporcionam resultados numéricos precisos e confiáveis.

O trabalho [3] mostra a funcionalidade da aritmética intervalar em aplicações em DSP e a importância de se fazer uma fundamentação matemática adequada para os conceitos que envolvem essas aplicações.

Em [4] foram introduzidas as abordagens intervalares das principais ferramentas do DSP: sinais e sistemas, amostragem, quantização e codificação. Para isso utilizou-se uma função genérica, chamada função aproximação F_{Id} que mapeia um número $x \in \mathbb{R}$ no menor intervalo $[\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{IR}$ que contém x e cujos extremos são representáveis no sistema de ponto flutuante.

Aqui são apresentadas funções particulares, $\underline{R}(x) = \lfloor x/\epsilon \rfloor * \epsilon$ e $\overline{R}(x) = \lceil x/\epsilon \rceil * \epsilon$, para se implementar a F_{Id}. Mais especificamente, utiliza-se essas funções para definir a amostragem, a quantização e a codificação intervalar, que são procedimentos extremamente necessários em DSP. No processo de amostragem, os valores $x[n]$ que não são representáveis no sistema numérico de ponto flutuante são substituídos por intervalos $X[n] = [x_1[n], x_2[n]]$ onde $x_1[n]$ é obtido arredondando $x[n]$ para o maior dos números representáveis menor ou igual a $x[n]$ e $x_2[n]$ é obtido arredondando $x[n]$ para o menor dos números representáveis maior ou igual a $x[n]$. O processo de quantização intervalar é feito fixando-se uma quantidade pré-definida de níveis de quantização intervalares e a partir daí as amostras intervalares são associadas a um deles obedecendo uma métrica apropriada. Por fim, ao sinal intervalar quantizado associa-se um código binário, o que garante compressão no armazenamento e agilidade no processamento.

2. Matemática Intervalar

Definição 2.1. *(Conjunto dos Intervalos de Números Reais) Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 \leq x_2$. O intervalo $[x_1, x_2]$ é constituído por todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 \leq x \leq x_2$. O conjunto dos intervalos reais é denotado por $\mathbb{IR}$.*

Definição 2.2. *(Aritmética de Moore em $\mathbb{IR}$) Dados os intervalos reais $X = [x_1, x_2]$ e $Y = [y_1, y_2]$ as operações elementares são definidas por:*

(a) $X + Y = [x_1 + y_1; x_2 + y_2]$;

(b) $X - Y = [x_1 - y_2; x_2 - y_1]$;

(c) $X \times Y = [min\{x_1.y_1, x_1.y_2, x_2.y_1, x_2.y_2\}, max\{x_1.y_1, x_1.y_2, x_2.y_1, x_2.y_2\}]$;

(d) $\dfrac{X}{Y} = X \times Y^{-1} = \left[min\left\{\dfrac{x_1}{y_1}, \dfrac{x_1}{y_2}, \dfrac{x_2}{y_1}, \dfrac{x_2}{y_2}\right\}, max\left\{\dfrac{x_1}{y_1}, \dfrac{x_1}{y_2}, \dfrac{x_2}{y_1}, \dfrac{x_2}{y_2}\right\}\right]$, *desde que* $0 \notin Y$.

O conjunto destas operações é o que se chama aritmética de Moore em $\mathbb{IR}$.

Definição 2.3 (Distância de Moore para Intervalos Reais)**.** *Sejam $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2] \in \mathbb{IR}$. A distância intervalar entre A e B é definida por $d_M(A, B) = max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$, em que $|a|$ é o módulo de a.*

Definição 2.4 (Ordem de Kulisch-Miranker para Números Complexos)**.** *Dados dois números complexos $a = a_1 + ia_2$ e $b = b_1 + ib_2$, diz-se que $a \leq_{KM} b$ se, e somente se, $a_1 \leq b_1$ e $a_2 \leq b_2$.*

3. Representação Intervalar no Sistema de Ponto Flutuante

Definição 3.1. *Seja $F(b, t, m, M)$ um sistema de ponto flutuante (Floating-Point System) que representa um subconjunto dos números reais em que $b \geq 2$ é a base de representação, $t \geq 1$ é a precisão, m e M são respectivamente o menor e o maior expoente. Os elementos do conjunto $F \subset \mathbb{R}$ são da forma $x = (-1)^s \times b^e \times (0 \cdot d_1 d_2 \ldots d_t)$ onde s é o sinal (0 para positivo e 1 para negativo), $m \leq e \leq M$, com $m < 0$, $M > 0$ e $|m| \approx M$ e $0 \cdot d_1 d_2 \ldots d_t$ é a mantissa com dígitos d_i na base b ($0 \leq d_i \leq b - 1, \forall i, 1 \leq i \leq t$).*

s	e	f

Tabela 1: Representação do armazenamento do ponto flutuante.

A Tabela 1 representa o armazenamento do ponto flutuante $x = (-1)^s \times b^e \times (0 \cdot d_1 d_2 \ldots d_t) \in F$ em que os dígitos 0 e ponto decimal não são representados. Nesta representação a mantissa é fracionária (< 1) e para assegurar representação única para cada $x \in F$ considera-se $d_1 \neq 0$ para $x \neq 0$.

O menor número de ponto flutuante é representado por ϵ, tal que $1 + \epsilon > 1$. Este número pode ser aproximado através de uma programação ou obtido por comandos específicos, como "eps" no MatLab e "EPSLON" no Fortran90.

Na definição de ponto flutuante a faixa do expoente $m \leq e \leq M$ é limitada fazendo com que não seja possível representar todos os números reais no sistema F. Sempre que uma operação gera um número com expoente superior ao expoente máximo tem-se o fenômeno conhecido por "overflow". Por outro lado, se a operação gera um número com expoente inferior ao exponete mínimo tem-se o fenômeno de "underflow". Na ocorrência desses dois fenômenos a máquina realiza alguma ação que pode variar de máquina para máquina. Por exemplo, no caso do overflow o cálculo é interrompido ou é retornado um número que representa o infinito da máquina. No caso do underflow o cálculo é interrompido, ou é arredondado para zero, ou ainda pode retornar um número subnormal formado com a mantissa não normalizada e o mínimo expoente. Existe também a limitação da mantissa que provoca erros de arredondamento. Mais detalhes podem ser vistos em [6].

A motivação inicial da Matemática Intervalar é a de trabalhar com dados intervalares que representam dados numéricos com incertezas e/ou erros. É muito importante que os dados intervalares usados em aplicações em algoritmos sejam corretos, no sentido de que cada intervalo contenha o número real que ele representa, como é abordado em [3, 8].

Aqui, utiliza-se a Matemática Intervalar e a função F_{Id} implementada em [2] para representar o número x através do intervalo $[x_1, x_2]$, de tal forma que $x_1, x_2 \in F$, x_1 é o maior dos pontos flutuantes menores ou iguais a x e x_2 é o menor dos pontos flutuantes maiores ou iguais a x. Em todas as etapas de uma implementação é realizado esse procedimento. Com isso, o resultado final contém o resultado real. Abaixo introduz-se as definições que fundamentam essas idéias.

Definição 3.2 (Representação Intervalar)**.** *Dado um número real $a \in \mathbb{R}$ e um intervalo $[x, y]$, diz-se que $[x, y]$ representa a quando $a \in [x, y]$.*

Definição 3.3 (Representação Intervalar de funções reais)**.** *Uma função intervalar $F : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ representa a função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quando para todo $x \in [a, b]$ tem-se $f(x) \in F([a, b])$.*

Definição 3.4. *Seja $\mathbb{F}$ o conjunto de todos os intervalos cujos extremos pertencem ao sistema de ponto flutuante F. A função aproximação é a função $F_{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o menor intervalo $X \in \mathbb{F}$ que representa $x \in \mathbb{R}$. Isto é, para $x \in X = [x_1, x_2]$, onde x_1 é o maior dos pontos flutuantes menores que x e x_2 é o menor dos pontos flutuantes maiores que x, tem-se $F_{Id}(x) = X$.*

Definição 3.5. *Seja $\mathbb{IR}$ o conjunto de todos os intervalos cujos extremos são números de um sistema de ponto flutuante. Seja $F_R : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ a função aproximação real. As funções $\underline{F_{Id}} : \mathbb{R} \to F$ e $\overline{F_{Id}} : \mathbb{R} \to F$ são as funções que associam a cada $x \in \mathbb{R}$ o maior dos pontos flutuantes menores que x e o menor dos pontos flutuantes maiores que x, respectivamente.*

Observação 3.1. *Dado um sinal $x[n] \in \mathbb{R}$ o sinal resultante da composição $F_{Id} \circ x[n]$ é um sinal intervalar que pode ser utilizado em implementações de algoritmos de processamento digital de sinais com o objetivo de codificar incertezas numéricas no próprio intervalo. Da mesma forma, dado um sistema usual $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a composição $F_{Id} \circ f$ é um sistema intervalar.*

Teorema 3.1. *Se $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é um sinal e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um sistema tal que $f(x[n]) = y[n]$, então o sistema $F_{Id} \circ f : \mathbb{R} \to (\mathbb{IR})$ definido por $(F_C \circ f)(x[n]) = Y[n]$ representa f.*

Demonstração: Para todo $x[n] \in \mathbb{C}$, tal que $f(x[n]) = y[n]$, deve-se ter $y[n] \in Y[n]$, o que é imediato pois $F_C(f(x[n])) = F_C(y[n])$ representa $y[n]$.

■

Lema 3.1. *Sejam F um sistema de ponto flutuante fixado, $x \in \mathbb{R}$ e $F_{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{IR}$ a função aproximação real. Se $F_{Id}(x) = [x_1, x_2]$, então $x_2 - x_1 = \epsilon$, onde ϵ é o menor número positivo representável no sistema F.*

Demonstração: Para $x \in \mathbb{R}$ seja $F_{Id}(x) = [x_1, x_2]$, onde x_1 é o maior número menor que x representável no sistema F e x_2 o menor número maior que x representável no sistema F. Como ϵ é o menor número positivo representável em F, tem-se que $x_2 = x_1 + \epsilon$ e $x_2 \leq x \leq x_1$.

■

Lema 3.2. *Sejam F um sistema de ponto fluante fixado e $x, y \in F$. Se $x < y$, então $y - x \geq \epsilon$.*

Demonstração: Seja F um sistema de ponto flutuante fixado cujo ϵ é o menor número positivo representável em F. Para $x, y \in F$, tal que $x < y$, se não existe nenhum número do sistema F entre x e y, então $y - x = \epsilon$. Se existe algum número do sistema F entre x e y, então $y - x > \epsilon$. Logo, $y - x \geq \epsilon$.

■

Lema 3.3. *Seja F um sistema de ponto fluante fixado, para $x, y \in F$ e $n \in \mathbb{Z}$, tem-se:*

(a) $x + y \in F$; (b) $x - y \in F$; (c) $nx \in F$.

Demonstração: A demonstração é imediata.

■

Lema 3.4. *Sejam F um sistema de ponto flutuante fixado, ϵ o menor número positivo representável em F, $F_{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{IR}$ a função aproximação real. Se $F_{Id}(a) = [a_1, a_2]$, então:*

(a) $0 \leq a_2 - a \leq \epsilon$; (b) $0 \leq a - a_1 \leq \epsilon$.

Demonstração: Como $F_{Id}(a) = [a_1, a_2]$, a_1 é o maior número menor que a representável em F e a_2 é o menor número maior que a representável em F. Para mostrar (a), é imediato que $a_2 - a \geq 0$ e como ϵ é o menor número positivo representável em F, tem-se $a_2 - a \leq \epsilon$, caso contrário, se $a_2 - a > \epsilon$, então existe $a_3 \in F$ tal que $a \leq a_3 \leq a_2$ e a_2 não seria mínimo. Para mostrar (b), a condição $a - a_1 \geq 0$ é imediata. Além disso, $a - a_1 \leq \epsilon$, caso contrário, se $a - a_1 > \epsilon$, então existe $a_4 \in F$ tal que $a_1 \leq a_4 \leq a$ e a_1 não seria máximo.

■

Os lemas mostrados acima serão utilizados para demonstrar alguns resultados posteriores. Utilizando a função aproximação, define-se abaixo a amostragem intervalar.

4. Quantização Intervalar

Muitos sinais de interesse prático são encontrados na forma analógica. Para extrair as informações desses sinais é necessário primeiro converter esses sinais para o formato digital, isto é, a sequência $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convertida em $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ e, posteriormente em $x : \mathbb{Z} \to A$, onde A é uma quantidade finita de valores. Este processo é realizado pelo converssor analógico para digital, cujas etapas são descritas abaixo:

(a) *Amostragem*: Seja $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um sinal contínuo que associa a todo $t \in \mathbb{R}$ um valor $x(t) \in \mathbb{R}$. A amostragem do sinal x com período T é a função $x_T : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por $x_T[n] = x(nT)$. Observe que aqui é feita a discretização do tempo do sinal. Porém, a variável permanece contínua.

(b) *Quantização*: Essa etapa consiste em mapear os valores contínuos de $x_T[n]$ para uma sequência $x_q[n]$ de valores discretos pré-definidos, dando origem ao sinal digital. Aqui é feita a discretização da variável. Os possíveis valores para $x_q[n]$ são chamados níveis de quantização. Para L níveis de quantização distintos o número de bits necessário é o maior inteiro menor ou igual a $log_2 L$, pois com b bits tem-se 2^b números binários distintos, então 2^b deve ser maior ou igual a L e, consequentemente, b deve ser o menor inteiro maior ou igual a $log_2 L$. Se $L = 2^n$, então

(c) *Codificação*: Por fim, a cada valor discreto $x_q[n]$ associa-se um conjunto de símbolos binários com o objetivo de diminuir o custo computacional.

Definição 4.1 (Amostragem Intervalar)**.** *Seja F um sistema numérico de ponto flutuante fixado e $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um sinal contínuo tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ associa-se $x(t) \in \mathbb{R}$. A amostragem intervalar de $x(t)$ com período T consiste em associar para cada valor do sinal amostrado $x[n]$ um valor intervalar $X[n] = [x_1[n], x_2[n]] \in \mathbb{IR}$, onde $x_1[n]$ é o maior dos números do sistema F menores ou iguais a $x(nT)$ e $x_2[n]$ é o menor dos números do sistema F maiores ou iguais a $x[n]$. Se o valor amostrado $x[n]$ for representável no sistema F, então a amostragem intervalar de $x(n)$ é representada por $X[n] = [x[n], x[n]]$.*

Seja L o número de níveis de quantização. Dado o sinal limitado $x(n)$, sejam $x_{\min}$ e $x_{\max}$ os valores mínimo e máximo que $x(n)$ pode assumir. Define-se o passo de quantização, que é a distância entre dois sucessivos níveis de quantização, através da seguinte relação:

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L-1}.$$

Definição 4.2. *Sejam $x(n)$ um sinal contínuo, cujos valores mínimo e máximo são $x_{\min}$ e $x_{\max}$, L o número de níveis de quantização e Δ o passo de quantização. Os níveis de quantização pontuais são definidos por: $n_1 = x_{\min}$, $n_2 = x_{\min} + \Delta$, $n_3 = x_{\min} + 2\Delta$, ..., $n_j = x_{\min} + (j-1)\Delta$, ..., $n_L = x_{\min} + (L-1)\Delta = x_{\max}$. O conjunto dos níveis n_j será denotado por K_1.*

Sejam F um sistema de numeração de ponto flutuante e ϵ o menor número positivo representável neste sistema, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um sinal contínuo e $F_{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{IR}$ a função aproximação real. Sejam $x_{\min}$ e $x_{\max}$ o menor e o maior valor assumido pelo sinal x, L o número de níveis de quantização e $\Delta = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{L-1}$ o passo de quantização.

Defina $F_{Id}(x_{\min}) = [n'_1, n'_2]$, $F_{Id}(\Delta) = [d_1, d_2]$ e os níveis de quantização intervalares por
$N_1 = [n'_1, n'_1 + \epsilon]$;
$N_2 = [n'_1 + d_1 - \epsilon, n'_1 + d_2 + \epsilon]$;
$N_3 = [n'_1 + 2d_1 - \epsilon, n'_1 + 2d_2 + \epsilon]$;
$\vdots$
$N_j = [n'_1 + (j-1)d_1 - \epsilon, n'_1 + (j-1)d_2 + \epsilon]$;
$\vdots$
$N_L = [n'_1 + (L-1)d_1 - \epsilon, n'_1 + (L-1)d_2 + \epsilon]$.

Definição 4.3 (Níveis de Quantização intervalares)**.** *Sejam F um sistema de numeração fixado, ϵ o menor número positivo representável no sistema F, L o número de níveis de quantização para o sinal $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_{\min}$ o menor valor que o sinal x pode assumir e $F_{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{IR}$ a função aproximação real. Para $F_{Id}(x_{\min}) = [n'_1, n'_2]$ e $F_{Id}(\Delta) = [d_1, d_2]$, define-se os níveis de quantização intervalares por $N_1 = [n'_1, n'_1 + \epsilon]$, $N_2 = [n'_1 + d_1 - \epsilon, n'_1 + d_2 + \epsilon]$, $N_3 = [n'_1 + 2d_1 - \epsilon, n'_1 + 2d_2 + \epsilon]$, ..., $N_j = [n'_1 + (j-1)d_1 - \epsilon, n'_1 + (j-1)d_2 + \epsilon]$, ..., $N_L = [n'_1 + (L-1)d_1 - \epsilon, n'_1 + (L-1)d_2 + \epsilon]$. O conjunto dos níveis de quantização intervalares será representado por K_2.*

Observação 4.1. *Todos os extremos dos intervalos do conjunto K_2 são representáveis no sistema F pois, pelo Lema 3.3, se $a, b \in F$ e $n \in \mathbb{Z}$, então $a + b$, $a - b$, $na \in F$.*

Lema 4.1. *A amplitude dos intervalos $N_j \in K_2$ é $\epsilon(j+1)$, $j = 1, \ldots, L$.*

Demonstração: Para $N_j = [n'_1 + (j-1)d_1 - \epsilon, n'_1 + (j-1)d_2 + \epsilon] \in K_2$ a amplitude é dada por $\omega(N_j) = (n'_1 + (j-1)d_2 + \epsilon) - (n'_1 + (j-1)d_1 - \epsilon) = jd_2 - d_2 + \epsilon - jd_1 + d_1 + \epsilon$. Como $F_{Id}(\Delta) = [d_1, d_2]$, tem-se que $d_2 = d_1 + \epsilon$. Logo, $\omega(N_j) = j\epsilon + \epsilon = \epsilon(j+1)$, para $j = 1, \ldots, L$.

■

Lema 4.2. *Seja K_2 o conjunto dos níveis de quantização intervalares. Dados dois níveis de quantização intervalares consecutivos $N_j = [\underline{N}_j, \overline{N}_j]$ e $N_{j+1} = [\underline{N}_{j+1}, \overline{N}_{j+1}]$, tem-se:*

(a) $\overline{N}_j - \underline{N}_j = \epsilon(j+1)$;

(b) $\overline{N}_{j+1} - \underline{N}_{j+1} = \epsilon(j+2)$;

(c) $\underline{N}_{j+1} - \overline{N}_j = d_1 - \epsilon(j+1)$;

(d) $\overline{N}_{j+1} - \overline{N}_j = d_2$;

(e) $\overline{N}_{j+1} - \underline{N}_j = \epsilon(j+2) + d_1$;

(f) $\underline{N}_{j+1} - \underline{N}_j = d_1$.

Demonstração: A demonstração segue imediatamente da Definição 4.3.

■

Lema 4.3. *Seja K_2 o conjunto dos níveis de quantização intervalares. Dados dois níveis de quantização intervalares consecutivos $N_j = [\underline{N}_j, \overline{N}_j]$ e $N_{j+1} = [\underline{N}_{j+1}, \overline{N}_{j+1}]$ e $X = [x_1, x_2] \in \mathbb{IR}$, tem-se:*

(i) Se $d(N_j, X) \leq d(N_{j+1}, X)$, *então* $x_1 \leq \dfrac{\underline{N}_j + \underline{N}_{j+1}}{2} + \dfrac{\epsilon(j+1)}{2}$ *e* $x_2 \leq \dfrac{\overline{N}_j + \overline{N}_{j+1}}{2} - \dfrac{\epsilon j}{2}$;

(ii) Se $d(N_{j+1}, X) \leq d(N_j, X)$, *então* $x_1 \geq \dfrac{\underline{N}_j + \underline{N}_{j+1}}{2} + \dfrac{\epsilon(j+1)}{2}$ *e* $x_2 \geq \dfrac{\overline{N}_j + \overline{N}_{j+1}}{2} - \dfrac{\epsilon j}{2}$.

Demonstração: Suponha que $\underline{N}_j < \overline{N}_j \leq x_1 \leq x_2 \leq \underline{N}_{j+1} < \overline{N}_{j+1}$. Logo $d_M(N_j, X) = \max\{|\underline{N}_j - x_1|, \overline{N}_j - x_2\} = d(\underline{N}_j, x_1) = x_1 - \underline{N}_j$ e $d_M(N_{j+1}, X) = \max\{|\underline{N}_{j+1}, x_1|, |\overline{N}_{j+1} - x_2|\} = d(\overline{N}_{j+1}, x_2) = \overline{N}_{j+1} - x_2$. Se $d(N_j, X) \leq d(N_{j+1}, X)$, então $x_1 - \underline{N}_j \leq \overline{N}_{j+1} - x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq \overline{N}_{j+1} + \underline{N}_j$.

$$\begin{aligned} & x_1 - \underline{N}_j \leq \overline{N}_{j+1} - x_2 \\ \Rightarrow \quad & x_1 + x_2 \leq \overline{N}_{j+1} + \underline{N}_j. \end{aligned}$$

Para $x_2 = x_1 + \epsilon$ e $\overline{N}_{j+1} = \underline{N}_{j+1} + \epsilon(j+2)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_1 + \epsilon \leq \underline{N}_{j+1} + \epsilon(j+2) + \underline{N}_j \\ \Rightarrow \quad & x_1 \leq \frac{\underline{N}_j + \underline{N}_{j+1}}{2} + \frac{\epsilon(j+1)}{2}. \end{aligned}$$

Para $x_1 = x_2 - \epsilon$ e $\underline{N}_j = \overline{N}_j - \epsilon(j+1)$, segue que:

$$\begin{aligned} & x_2 - \epsilon + x_2 \leq \overline{N}_{j+1} + \overline{N}_j - \epsilon(j+1) \\ \Rightarrow \quad & x_2 \leq \frac{\overline{N}_j + \overline{N}_{j+1}}{2} - \frac{\epsilon j}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $d(N_{j+1}, X) \leq d(N_j, X)$, então $\overline{N}_{j+1} - x_2 \leq x_1 - \underline{N}_j \Rightarrow x_2 + x_1 \geq \underline{N}_j + \overline{N}_{j+1}$.

$$\begin{aligned} & \overline{N}_{j+1} - x_2 \leq x_1 - \underline{N}_j \\ \Rightarrow \quad & x_2 + x_1 \geq \underline{N}_j + \overline{N}_{j+1}. \end{aligned}$$

Para $x_2 = x_1 + \epsilon$ e $\overline{N}_{j+1} = \overline{N}_{j+1} + \epsilon(j+2)$, segue que:

$$\begin{aligned} & 2x_1 \geq \underline{N_j} + \underline{N}_{j+1} + \epsilon(j+1) \\ \Rightarrow \quad & x_1 \geq \frac{\underline{N_j} + \underline{N}_{j+1}}{2} + \frac{\epsilon(j+1)}{2}. \end{aligned}$$

Para $x_1 = x_2 - \epsilon$ e $\underline{N}_j = \overline{N}_j - \epsilon(j+1)$, tem-se:

$$\begin{aligned} & 2x_2 \geq \overline{N_j} + \overline{N}_{j+1} - \epsilon j \\ \Rightarrow \quad & x_2 \geq \frac{\overline{N_j} + \overline{N}_{j+1}}{2} - \frac{\epsilon j}{2}. \end{aligned}$$

Suponha que $\underline{N}_j \leq x_1 \leq \overline{N}_j \leq x_2 \leq \underline{N}_{j+1} \leq \overline{N}_{j+1}$. Neste caso, $d_M(N_j, X) \leq d_M(N_{j+1}, X)$. Sejam $d(\underline{N}_j, \overline{N}_j) = \epsilon(j+1)$, $d(x_1, x_2) = \epsilon$, $d(\overline{N}_j, x_2) = k_1$, $d(x_2, \underline{N}_{j+1}) = k_2$ e $d(\underline{N}_{j+1}, \overline{N}_{j+1}) = \epsilon(j+2)$. Assim, $d_M(N_j, X) = \max\{|\underline{N}_j - x_1|, |\overline{N}_j - x_2|\} = d(\underline{N}_j, x_1) = x_1 - \underline{N}_j$ e $d_M(N_{j+1}, X) = \max\{|\underline{N}_{j+1} - x_1|, |\overline{N}_{j+1} - x_2|\} = \overline{N}_{j+1} - x_2$.
Como $d_M(N_j, X) \leq d_M(N_{j+1}, X)$, segue que $x_1 - \underline{N}_j \leq \overline{N}_{j+1} - x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq \overline{N}_{j+1} + \underline{N}_j$. Para $x_2 = x_1 + \epsilon$ e $\overline{N}_{j+1} = \underline{N}_{j+1} + \epsilon(j+2)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_1 + \epsilon \leq \underline{N}_{j+1} + \epsilon j + 2\epsilon + \underline{N}_j \\ \Rightarrow \quad & 2x_1 \leq \underline{N}_{j+1} + \underline{N}_j + \epsilon(j+1) \\ \Rightarrow \quad & x_1 \leq \frac{\underline{N}_{j+1} + \underline{N}_j}{2} + \frac{\epsilon(j+1)}{2}. \end{aligned}$$

Para $x_1 = x_2 - \epsilon$ e $\underline{N}_j = \overline{N}_j - \epsilon(j+1)$, segue que:

$$\begin{aligned} & x_2 - \epsilon + x_2 \leq \overline{N}_{j+1} + \overline{N}_j \epsilon j - \epsilon \\ \Rightarrow \quad & 2x_2 \leq \overline{N}_j + \overline{N}_{j+1} - \epsilon j \\ \Rightarrow \quad & x_2 \leq \frac{\overline{N}_j + \overline{N}_{j+1}}{2} - \frac{\epsilon j}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, suponha que $\underline{N}_j \leq \overline{N}_j \leq x_1 \leq \underline{N}_{j+1} \leq x_2 \leq \overline{N}_{j+1}$. Neste caso, $d_M(N_{j+1}, X) \leq d_M(N_j, X)$. Sejam $d(\underline{N}, \overline{N}_j) = \epsilon(j+1)$, $d(\overline{N}_j, x_1) = k_1$, $d(x_1, x_2) = \epsilon$, $d(\underline{N}_{j+1}, x_2) = k_2$ e $d(x_2, \overline{N}_{j+1}) = \epsilon(j+2)$. Assim, $d_M(N_j, X) = \max\{|\underline{N}_j - x_1|, |\overline{N}_j - x_2|\} = x_1 - \underline{N}_j$ e $d_M(N_{j+1}, X) = \max\{|\underline{N}_{j+1} - x_1|, |\overline{N}_{j+1} - x_2|\} = \overline{N}_{j+2} - x_2$.
Como $d_M(N_{j+1}, X) \leq d_M(N_j, X)$, segue que:

$$\begin{aligned} & \overline{N}_{j+1} - x_2 \leq x_1 - \underline{N}_j \\ \Rightarrow \quad & x_1 + x_2 \geq \underline{N}_j + \overline{N}_{j+1}. \end{aligned}$$

Para $x_2 = x_1 + \epsilon$ e $\overline{N}_{j+1} = \underline{N}_{j+1} + \epsilon(j+2)$, segue que:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_1 + \epsilon \geq \underline{N}_j + \underline{N}_{j+1} + \epsilon(j+2) \\ \Rightarrow \quad & x_1 \geq \frac{\underline{N}_j + \underline{N}_{j+1}}{2} + \frac{\epsilon(j+1)}{2}. \end{aligned}$$

Para $x_1 = x_2 - \epsilon$ e $\underline{N}_j = \overline{N}_j - \epsilon(j+1)$, obtem-se:

$$\begin{aligned} & x_2 - \epsilon + x_2 \geq \overline{N}_j - \epsilon(j+1) + \overline{N}_{j+1} \\ \Rightarrow \quad & x_2 \geq \frac{\overline{N}_j + \overline{N}_{j+1}}{2} - \frac{\epsilon j}{2}. \end{aligned}$$

■

O resultados do Lema 4.3 será usado para demonstrar alguns resultados que serão vistos nessa seção.

Teorema 4.1. *Os níveis de quantização intervalares $N_j \in K_2$ representam os níveis de quantização pontuais $n_j \in K_1$.*

Demonstração: Sejam $x : \mathbb{R} \to \mathbb{IR}$ um sinal contínuo, Δ o passo de quantização pontual, $x_{\min} = n_1$ o valor mínimo que o sinal x pode assumir, $F_{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{IR}$ a função aproximação real. Se $F_{Id}(\Delta) = [d_1, d_2]$ e $F_{Id}(x_{\min}) = [n'_1, n'_2]$, então, pelo Lema 3.4, $0 \leq d_2 - \Delta \leq \epsilon$, $d_1 - \Delta \leq 0$ e $0 \leq n_1 - n'_1 \leq \epsilon$. Para que N_j representar n_j deve-se ter $n_j \in N_j$, para $j = 1, \ldots, L$.

É trivial que $n_1 \in N_1$. Suponha por contradição que $n_1 \notin N_1$. Se $n_1 > n'_1 + \epsilon$, então $n_1 - n'_1 > \epsilon$, contradizendo o Lema 3.4.

Para mostrar que $n_2 \in N_2$, deve-se ter $n_1 + \epsilon \in [n'_1 + d_1 - \epsilon, n'_1 + d_2 + \epsilon]$. Suponha que $n_1 + \epsilon > n'_1 + d_2 + \epsilon$, logo $n_1 - n'_1 > d_2 - \Delta + \epsilon > \epsilon$, pois $d_2 - \Delta \geq 0$, contradizendo o Lema 3.4. Por outro lado, suponha que $n_1 + \Delta < n'_1 + d_1 - \epsilon$, logo $n_1 - n'_1 < d_1 - \Delta - \epsilon < -\epsilon$, pois $d_1 \Delta \leq 0$, contradizendo o Lema 3.4.

Generalizando, para N_j representar n_j, deve-se ter $n_1 + (j-1)\Delta \in [n'_1 + (j+1)d_1 - \epsilon, n'_1 + (j-1)d_2 + \epsilon]$. Suponha que $n_1 + (j-1)\Delta > n'_1 + (j-1)d_2 + \epsilon \Rightarrow n_1 - n'_1 > j(d_2 - \Delta) + (\Delta - d_2) + \epsilon \Rightarrow n_1 - n'_1 > (d_2 - \Delta)(j-1) + \epsilon$. Pelo Lema 3.4, $d_2 - \Delta \geq 0$. Além disso, $j - 1 \geq 1$. Logo $n_1 - n'_1 \geq \epsilon$, contradizendo o Lema 3.4. Por outro lado, suponha que $n_1 + (j-1)\Delta < n'_1 + (j-1)d_1 - \epsilon \Rightarrow n_1 - n'_1 < (j-1)(d_1 - \Delta) - \epsilon$. Pelo Lema 3.4, $d_1 - \Delta \leq 0$. Além disso, $j - 1 \geq 0$. Logo $n_1 - n'_1 < -\epsilon < 0$, contradizendo o Lema 3.4. Portanto, N_j representa n_j, para $j = 1, \ldots, L$.

■

Teorema 4.2. *Os níveis de quantização intervalares N_j, $j = 1, \ldots, L$ são comparáveis pela ordem de Kulisch-Miranker, isto é, $N_1 \leq_{KM} N_2 \leq_{KM} \ldots \leq_{KM} N_L$.*

Demonstração: Dados $N_j = [\underline{N}_j, \overline{N}_j] = [n'_1 + (j-1)d_1 - \epsilon, n'_1 + (j-1)d_2 + \epsilon]$ e $N_{j+1} = [\underline{N}_{j+1}, \overline{N}_{j+1}] = [n'_1 + jd_1 - \epsilon, n'_1 + jd_2 + \epsilon]$ arbitrários, tem-se que $\underline{N}_j = n'1 + (j-1)d_1 - \epsilon = (n'_1 + jd_1 - \epsilon) - d_1 \leq n'_1 + jd_1 - \epsilon = \underline{N}_{j+1}$ e $\overline{N}_j = n'_1 + (j-1)d_2 + \epsilon = (n'_1 + jd_2 + \epsilon) - d_2 \leq n'_1 + jd_2 + \epsilon = \overline{N}_{j+1}$. Logo, $N_j \leq_{KM} N_{j+1}$, para $j = 1, \ldots, L$.

■

Teorema 4.3. *Se $d_1 - \epsilon(1+L) > \epsilon > 0$, então não há interseção entre os níveis de quantização intervalares N_j, $j = 1, \ldots, L$.*

Demonstração: Para verificar que não há interseção entre o nível $N_1 = [n'_1, n'_1 + \epsilon]$ e o nível $N_2 = [n'_1 + d_1 - \epsilon, n'_1 + d_1 - \epsilon, n'_1 + d_2 + \epsilon]$, observe que $n'_1 + d_1 - \epsilon - (n'_1 + \epsilon) = d_1 - 2\epsilon > 0$, basta fazer $L = 1$ em $d_1 - \epsilon(1+L) > \epsilon > 0$.

Generalizando, considere os níveis $N_j = [n'_1 + (j-1)d_1 - \epsilon, n'_1 + (j-1)d_2 + \epsilon]$ e $N_{j+1} = [n'_1 + jd_1 - \epsilon, n'_1 + jd_2 + \epsilon]$. Tem-se que $n'_1 + jd_1 - \epsilon - (n'_1 + (j-1)d_2 + \epsilon) = jd_1 - \epsilon - (j - 1d_2) - \epsilon = jd_1 - 2\epsilon - jd_2 + d_2$. Considerando $d_1 \neq d_2$ e $F_{Id}(\Delta) = [d_1, d_2]$, segue do Lema 3.1 que $d_2 = d_1 + \epsilon$. Logo, $n'_1 + jd_1 - \epsilon - (n'_1 + (j-1)d_2 + \epsilon) = d_1 - \epsilon(1+j) > \epsilon > 0$, basta fazer $L = j$ em $d_1 - \epsilon(1+L) > \epsilon > 0$. Se $F_{Id}(\Delta) = [d_1, d_1]$, então $n'_1 + jd_1 - \epsilon - (n'_1 + (j-1)d_1 + \epsilon) = d_1 - 2\epsilon > \epsilon > 0$, basta fazer $L = 1$ em $d_1 - \epsilon(1+L) > \epsilon > 0$.

■

Corolário 4.1. *Se $d_1 - \epsilon(1+L) > \epsilon > 0$, então $F_{Id}(X[n])$ intercepta no máximo um dos níveis de quantização intervalares N_j, $j = 1, \ldots, L$.*

Demonstração: Seja $F_{Id}(X[n]) = [x_1[n], x_2[n]]$. Como $\underline{N}_{j+1} - \overline{N}_j = d_1 - \epsilon(j+1) > \epsilon > 0$ e como $x_2[n] - x_1[n] = \epsilon$, pelo Lema 3.1, tem-se imediatamente que $X[n] \cap N_{j+1} = \emptyset$.

■

Definição 4.4 (Quantização Intervalar)**.** *Sejam K_1 e K_2 o conjunto dos níveis de quantização pontuais e intervalares, respectivamente. Para $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja $X[n]$ a amostragem intervalar. Define-se a função de quantização intervalar pela função $Q_I : \mathbb{Z} \to K_1 \cup K_2$ que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, associa o valor $X[n]$ a um nível de quantização. Mais especificamente, para $X[n] = [x_1[n], x_2[n]]$, tem-se que $Q_I(X[n]) = N_j$, se $d_M(X[n], N_j)$ é mínima para $j = 1, \ldots, L$.*

Observação 4.2. *Utiliza-se a notação $Q_I(X[n]) = X_q[n]$ para indicar o sinal quantizado.*

Teorema 4.4. *Seja $d_1 - \epsilon(1+L) > \epsilon > 0$. Se $F_{Id}(X[n])$ intercepta N_j, então $X_q[n] = N_j$.*

Demonstração: Sejam $F_{Id}(X[n]) = [x_1[n], x_2[n]]$, $N_j = [\underline{N}_j, \overline{N}_j] = [n'_1 + (j-1)d_1 - \epsilon, n'_1 + (j-1)d_2 + \epsilon]$ e $N_{j+1} = [\underline{N}_{j+1}, \overline{N}_{j+1}] = [n'_1 + jd_1 - \epsilon, n'_1 + jd_2 + \epsilon]$. Tem-se que $d_M(X[n], N_j) = \max\{|\underline{N}_j - x_1[n]|, |\overline{N}_j - x_2[n]|\}$ e $d_M(X[n], N_{j+1}) = \max\{|\underline{N}_{j+1} - x_1[n]|, |\overline{N}_{j+1} - x_2[n]|\}$.

Se $\underline{N}_j < x_1[n] < x_2[n] < \overline{N}_j$, é imediato.

Suponha que $\underline{N}_j < x_1[n] < \overline{N}_j < x_2[n]$. Como $\overline{N}_j - \underline{N}_j = \epsilon(j+1)$, $\underline{N}_{j+1} - \overline{N}_j = d_1 - \epsilon(j+1)$, $\overline{N}_{j+1} - \overline{N}_j = d_2$ e $x_2[n] - x_1[n] = \epsilon$, pelo Lema 3.1, segue que $|x_2[n] - \overline{N}_j| < \epsilon$, $|\underline{N}_j - x_1[n]| < \epsilon(j+1)$, $|\underline{N}_{j+1} - x_1[n]| > d_1 - \epsilon(j+1) > \epsilon$, e $|\overline{N}_{j+1} - x_2[n]| > \epsilon(j+1)$ garantindo que $d_M(X[n], N_j) < d_M(X[n], N_{j+1})$. Logo, $X_q[n] = N_j$.

Suponha que $x_1[n] < \underline{N}_j < x_2[n] < \overline{N}_j$. Neste caso, $|\underline{N}_j - x_1[n]| < \epsilon$, $|\overline{N}_j - x_2[n]| < \epsilon(j+1)$, $|\underline{N}_{j+1} - x_2[n]| > \epsilon(j+2) + d_1 - \epsilon(j+1) > \epsilon(j+2) + \epsilon$ e $|\overline{N}_{j+1} - x_2[n]| > \epsilon(j+2) + d_1 - \epsilon(j+1) > \epsilon(j+2) + \epsilon$, garantindo que $d_M(X[n], N_j) < d_M(X[n], N_{j+1})$. Logo, $X_q[n] = N_j$.

■

Após a realização da quantização do sinal é feita a codificação, isto é, atribui-se aos finitos valores dos níveis de quantização códigos binários com os quais todo processo de tratamento do sinal é realizado. Isso possibilita baixo custo no armazenamento dos dados e mais rapidez no processamento. Na quantização usual, atribui-se um único número binário a cada nível de quantização. Com B bits pode-se obter 2^B números binários distintos. Logo, para se representar L níveis de quantização é preciso ter $2^B \geq L$, isto é, $B \geq log_2 L$. Em outras palavras, o número de bits necessário em um codificador é o menor inteiro maior ou igual a $log_2 L$. Se L é uma potência de 2, isto é, $L = 2^n$ então $B = n$.

Para o caso intervalar, para cada nível de quantização $N_j = [\underline{N}_j, \overline{N}_j]$ são necessários dois números binários que são utilizados para codificar cada um dos extremos. Assim, se o número de níveis de quantização é $L = 2^n$, então o número de bits necessários para a codificação intervalar é $B = n + 1$.

Definição 4.5 (Codificação Intervalar)**.** *Sejam $L = 2^n$ o número de níveis de quantização intervalares e $B = n + 1$ o número de bits necessários. Define-se a codificação intervalar dos níveis $N_j = [\underline{N}_j, \overline{N}_j]$, $j = 1, \ldots, L$ pela relação que associa a cada nível N_j um único intervalo da forma $[a_1 \cdots a_B, b_1 \cdots b_B]$, onde $a_i, b_i \in \{0, 1\}$, para $i = 1, \ldots, B$.*

Exemplo 4.1. *Para se codificar $L = 8$ níveis de quantização pontuais são necessários $B = 3$ bits e uma das possibilidades é a seguinte associação: $n_1 = 000$, $n_2 = 001$, $n_3 = 010$, $n_4 = 100$, $n_5 = 011$, $n_6 = 101$, $n_7 = 110$, $n_8 = 111$.*

Exemplo 4.2. *Para se codificar $L = 8$ níveis de quantização intervalares são necessários $B = 4$ bits que originam 16 números binários. Uma das possibilidades é a associação: $N_1 = [0000, 0001]$, $N_2 = [0010, 0100]$, $N_3 = [1000, 0011]$, $N_4 = [0110, 1100]$, $N_5 = [1001, 0101]$, $N_6 = [1010, 0111]$, $N_7 = [1011, 1101]$ e $N_8 = [1110, 1111]$.*

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estabelecida a fundamentação para a quantização intervalar utilizando para isso a Matemática Intervalar e arredondamentos direcionados por meio de funções específicas, como a função aproximação F_{Id} que mapeia um número x para o menor intervalo $[x_1, x_2]$ contendo x cujos extremos pertencem a um sistema de ponto flutuante. Esta função é utilizada para estender sinais e sistemas usuais para sinais e sistemas intervalares de tal forma que eles representam os usuais. Aqui foi definida a noção de amostragem intervalar e níveis de quantização intervalares que darão origem ao sinal quantizado intervalar e, consequentemente, ao erro de quantização intervalar. Com os resultados mostrados pode-se estimar o erro intervalar $E[n] = [e_1[n], e_2[n]]$ da seguinte maneira $-\frac{1}{2}(d_1 + \epsilon(L+3)) \leq e_1[n] \leq \frac{1}{2}(d_1 - 3\epsilon)$ e $-\frac{1}{2}(d_1 - \epsilon) \leq e_2[n] \leq \frac{1}{2}(d_1 + \epsilon(L+3))$. Os resultados mostrados aqui garantem que os níveis de quantização intervalares representam os níveis pontuais e o erro intervalar representa o erro pontual e proporcionam ao processamento digital de sinais maior controle de erro.

REFERÊNCIAS

[1] G. Alefeld, J. Herzberger. Introduction to Interval Computations. Academic Press. New York. 1983.

[2] M. A. Campos, G. P. Dimuro, A. C. R. Costa, J. F. F. Araújo, A. M. Dias. Probabilidade Intervalar e Cadeias de Markov Intervalar no Maple. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, 3, No. 2 (2002), 53-62.

[3] W. Edmonson, R. Gupte, S. Ocloo, J. Gianchandani, W. Alexander. Interval Arithmetic Logic Unit for Signal Processing and Control Applications. Printed in USA. REC - 2006.

[4] F. T. Santana, F. L. Santana, A. M. G. Guerreiro, A. D. Dória Neto, R. H. N. Santiago. A framework for interval quantization and application to interval based algorithms in digital signal processing. To appear in Fundamenta Informaticae, 2011.

[5] R. E. Moore. Methods and Applications of Interval Analysis. Studies in Appliede Mathematics-SIAM, Philadelphia, 1979.

[6] M. L. Overton. Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic, SIAM, Philadelphia, 2001.

[7] J. G. Proakis, D. G. Manolakis. Digital Signal Processing. Principles, algorithms and Applications. 3ed. Prentice Hall Internetional, INC, 1996.

[8] R. H. N. Santiago, B. R. C. Bedregal, B. M. Acióly. Formal Aspects of Correctness and Optimality of Interval Computations. Formal Aspects of Computing 18(2), 231-243. 2006.

[9] R. M. P. Trindade, B. R. C. Bedregal, A. D. Dória Neto. Basics Concepts of Intervalar Digital Signal Processing. In: World Congress on Science, Engineering and Technology, 2008, Paris. Proceedings of WCSET 2008, 2008. v. 01. p. 66-70.