

ALGUNS RESULTADOS TEÓRICOS DAS MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS ESPARSAS EM RETICULADOS COMPLETOS

Daniela Maria Grande Vicente, Marcos Eduardo Valle

Universidade Estadual de Londrina
danigrande.math@gmail.com, valle@uel.br

Resumo – Memórias Autoassociativas Esparsas em Reticulados Completos (MAERCs) são redes neurais artificiais progressivas com uma única camada de neurônios que computam ou o máximo ou o mínimo de um subconjunto dos dados de entrada. Estas memórias requerem pouco esforço computacional e são matematicamente mais simples que modelos tradicionais e muitas outras memórias como, por exemplo, as memórias autoassociativas morfológicas em tons de cinza (*gray-scale MAMs*) de Ritter e Sussner, pois são baseadas somente em uma estrutura de reticulado, ou seja, um conjunto ordenado onde as operações de supremo e ínfimo estão bem definidas. Este artigo apresenta resultados teóricos das MAERCs definidas num reticulado completo arbitrário. Precisamente, caracterizamos a fase de recordação das MAERCs em termos de seus pontos fixos e mostramos que qualquer polinômio reticulado endomórfico no conjunto de memórias fundamentais é um ponto fixo dessas memórias. Também estabelecemos uma relação entre as MAERCs e as originais *gray-scale MAMs*.

Palavras-chave – Memórias Associativas, morfologia matemática, teoria de reticulados, redes neurais artificiais.

Abstract – Sparsely connected autoassociative lattice memories (SCALMs) are single layer feedforward neural networks that compute either the maximum or the minimum of a finite subset of the input signals. These memories are computationally cheaper and mathematically simpler than traditional models and many other memories, including the gray-scale morphological associative memories (MAMs) of Ritter and Sussner, because they rely only on a complete lattice structure, that is, an ordered set in which the supremum and infimum operations are well defined. This paper provides theoretical results concerning the SCALMs defined on an arbitrary complete lattice. Precisely, we characterized the recalling phase of a SCALM in terms of its fixed points and we showed that any endomorphic lattice polynomial on the fundamental memory set is a fixed point of the memory. Also, we established a relationship between the SCALMs and the original gray-scale MAMs.

Keywords – Associative memories, mathematical morphology, lattice theory, artificial neural networks.

1. Introdução

Uma *Memória Associativa* é um modelo inspirado na forma com que o cérebro humano armazena e recorda informações por associação. Estes modelos são projetados para armazenar pares de associações. Além disso, uma memória associativa também deve ser capaz de recordar um padrão memorizado mesmo após a apresentação de uma versão distorcida ou incompleta de um item armazenado [1, 2].

Uma classe de memórias, chamadas *memórias associativas morfológicas* (MAMs), foi introduzida por Ritter e Sussner em meados de 1990 [3]. Estas MAMs são definidas em termos de operações matriciais definidas numa sub-álgebra da álgebra de imagens, chamada álgebra minimax [4], onde as operações de soma e multiplicação são substituídas por operações de reticulados. Como consequência, as propriedades desta classe de memórias são muito diferentes dos modelos de redes neurais tradicionais. Por exemplo, estas MAMs exibem características desejáveis, como ótima capacidade absoluta de armazenamento e convergência em uma única iteração no caso autoassociativo com *feedback*. Adicionalmente, estes modelos foram usados com sucesso para a reconstrução de imagens em tons de cinza corrompidas com ruído positivo ou negativo [5]. Por isso, serão referidos nesse artigo como *gray-scale MAMs*.

As *memórias autoassociativas esparsas em reticulados completos* (MAERCs), anteriormente denominadas *memórias autoassociativas morfológicas esparsas*, correspondem a um modelo de rede neural morfológica de camada única baseado somente em operações de supremos e ínfimos [6]. Precisamente, a saída de cada neurônio da rede é dado pelo máximo ou mínimo de algumas de suas entradas. Além disso, estes modelos são muito gerais uma vez que necessitam somente de uma estrutura de reticulado completo, ou seja, um conjunto parcialmente ordenado onde as operações de supremo e ínfimo estão bem definidas. Consequentemente estas memórias possuem muitas aplicações. Por exemplo, as MAERCs podem ser usadas para o armazenamento e recordação de padrões multivalor, que incluem imagens coloridas como caso particular [6, 7].

Do ponto de vista computacional, as MAERCs são sintetizadas usando um esquema de armazenamento que geralmente fornece uma rede com conexões esparsas e, consequentemente, requerem muito menos recursos computacionais que outros modelos de memória associativa. Por exemplo, para armazenar doze imagens coloridas de tamanho 512×512 pixels numa MAERC, foram necessários aproximadamente 83 MB de espaço. Em contraste, seriam necessários aproximadamente 384 GB para o armazenamento das mesmas doze imagens coloridas utilizando as *gray-scale MAMs*.

Neste artigo demonstramos as propriedades das MAERCs para um reticulado completo arbitrário. Especificamente, mostramos que as MAERCs exibem ótima capacidade absoluta de armazenamento e convergência em uma única iteração. Além disso, tal como as *gray-scale* MAMs, a fase de recordação das MAERCs foi caracterizada por seus pontos fixos. Adicionalmente, estabelecemos uma relação entre as MAERCs e as originais *gray-scale* MAMs.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na seção 2 revisamos os conceitos básicos das MAERCs. Resultados teóricos são apresentados na seção 3. Uma relação entre as originais *gray-scale* MAMs e as MAERCs foi estabelecida na seção 4. O artigo termina com a conclusão na seção 5.

2. Uma Breve Revisão das Memórias Autoassociativas Esparsas em Reticulados Completos

Uma memória autoassociativa é um sistema de entrada e saída que permite o armazenamento e a recordação de um dado item mesmo após a apresentação de uma versão ruidosa ou incompleta do item armazenado [1, 2]. Formalmente, dado um conjunto finito de itens $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathcal{X}$, chamado *conjunto de memórias fundamentais*, uma memória autoassociativa corresponde a uma aplicação $\mathcal{A} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{A}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, p$. Além disso, uma memória autoassociativa deve exibir alguma tolerância a ruído, ou seja, $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{x}}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$, onde $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$ é uma versão corrompida ou incompleta da memória fundamental \mathbf{x}^ξ .

Neste trabalho, assumimos que \mathcal{X} , o conjunto onde pertencem as memórias fundamentais, é dado pelo produto cartesiano de um reticulado completo \mathbb{V} , ou seja, $\mathcal{X} = \mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V} = \mathbb{V}^n$. Lembrando que \mathbb{V} é um reticulado completo munido de uma ordem parcial \leq tal que todo subconjunto não vazio $X \subseteq \mathbb{V}$ possui um supremo e um ínfimo em \mathbb{V} [8, 9]. Denotaremos o *supremo* e o *ínfimo* de $X \subseteq \mathbb{V}$, respectivamente, por $\bigvee X$ e $\bigwedge X$.

Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{V}^n$, onde cada padrão \mathbf{x}^ξ corresponde a um vetor $\mathbf{x}^\xi = [x_1^\xi, \dots, x_n^\xi] \in \mathbb{V}^n$, a ordem parcial em \mathbb{V} é usada como segue para determinar o conjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, onde $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ denota o conjunto dos inteiros positivos menores ou iguais a n :

$$\mathcal{S} = \{(i, j) : x_j^\xi \leq x_i^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p\}. \quad (1)$$

Posteriormente, as operações de supremo e ínfimo são usadas para definir dois modelos de *Memórias Autoassociativas Esparsas em Reticulados Completos* (MAERCs). Precisamente, as MAERCs são as aplicações \mathcal{W} e \mathcal{M} em \mathcal{X} definidas com segue para todo padrão de entrada $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{V}^n$:

$$[\mathcal{W}(\mathbf{x})]_i = \bigvee \{x_j : (i, j) \in \mathcal{S}\}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (2)$$

e

$$[\mathcal{M}(\mathbf{x})]_i = \bigwedge \{x_j : (j, i) \in \mathcal{S}\}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (3)$$

Os modelos dados em (2) e (3) correspondem a uma rede neural de camada única onde os neurônios da rede calculam o supremo ou o ínfimo de algumas de suas entradas. Um elemento em \mathcal{S} afirma que existe uma conexão entre a j -ésima entrada e o i -ésimo neurônio da rede. Desta forma, o conjunto \mathcal{S} corresponde ao *conjunto de junções sinápticas* das MAERCs \mathcal{W} e \mathcal{M} . Do ponto de vista computacional, a cardinalidade do conjunto \mathcal{S} , e portanto, o número de junções sinápticas dos modelos \mathcal{W} e \mathcal{M} usualmente decrescem consideravelmente com o aumento do número de memórias fundamentais [6].

Em contraste com as memórias associativas convencionais que são baseadas sobre o anel $(\mathbb{R}, +, \times)$ e as originais *gray-scale* MAMs que são definidas em uma extensão de reticulado limitado com ordem de grupo, as MAERCs dadas por (2) e (3) dependem somente de uma estrutura de reticulado completo \mathbb{V} [3, 6, 10]. O seguinte exemplo apresenta uma aplicação das MAERCs \mathcal{W} and \mathcal{M} para o armazenamento de padrões definidos num reticulado simples composto de 4 letras. Todavia, esses modelos possuem um vasto domínio de aplicações que incluem a reconstrução de imagens coloridas como um caso particular [6, 7].

Exemplo 1. Suponha que o conjunto finito $\mathbb{V} = \{a, b, c, d\}$ é ordenado de acordo com o diagrama de Hasse apresentado na Figura 1. Observe que ambas inequações $a < b < d$ e $a < c < d$ são válidas. Além disso, embora os elementos b e c sejam incomparáveis, tem-se $b \vee c = d$ and $b \wedge c = a$. Portanto, \mathbb{V} representa um reticulado completo.

Dado o conjunto das memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\} \subseteq \mathbb{V}^4$, onde $\mathbf{x}^1 = [d, b, c, c]$, $\mathbf{x}^2 = [d, c, a, b]$ e $\mathbf{x}^3 = [b, a, c, d]$, a equação (1) fornece o seguinte conjunto de junções sinápticas:

$$\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 3), (4, 4)\}. \quad (4)$$

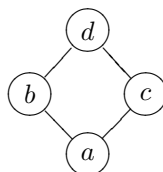


Figura 1: Diagrama de Hasse do reticulado $\mathbb{V} = \{a, b, c, d\}$ do Exemplo 1.

Se o padrão $\mathbf{x} = [c, b, c, a] \in \mathbb{V}^4$ é apresentado como entrada para as MAERCs, tem-se como saída os padrões:

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}) = [x_1 \vee x_2, x_2, x_3, x_3 \vee x_4] = [c \vee b, b, c, c \vee a] = [d, b, c, c], \quad (5)$$

e

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = [x_1, x_1 \wedge x_2, x_3 \wedge x_4, x_4] = [c, c \wedge b, c \wedge a, a] = [c, a, a, a]. \quad (6)$$

Note que $\mathcal{W}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^1$ embora $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^1$.

3. Resultados Teóricos das Memórias Autoassociativas Esparsas em Reticulados Completos

Nesta seção provamos alguns resultados teóricos a respeito da capacidade de armazenamento e tolerância a ruído das MAERCs dadas por (1), (2) e (3). Especificamente, demonstramos as propriedades dos modelos de memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} usando os conceitos da teoria dos reticulados e da morfologia matemática. As principais referências utilizadas foram Birkhoff [8] e Heijmans [9].

Primeiramente, observamos que o conjunto $\mathcal{X} = \mathbb{V}^n$, onde pertencem as memórias fundamentais, herda a estrutura de reticulado completo de \mathbb{V} se, para quaisquer $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ e $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]$ em \mathcal{X} , definirmos

$$\mathbf{x} \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{y} \quad \text{se e somente se} \quad x_i \leq_{\mathbb{V}} y_i \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (7)$$

O subscrito foi adicionado ao símbolo “ \leq ” para enfatizar que os esquemas ordenados são definidos em \mathcal{X} e \mathbb{V} , respectivamente. O ínfimo e o supremo de um subconjunto não vazio $X \subseteq \mathbb{V}$ são calculados componente a componente como segue:

$$\left[\bigvee X \right]_i = \bigvee_{\mathbf{x} \in X} x_i \quad \text{e} \quad \left[\bigwedge X \right]_i = \bigwedge_{\mathbf{x} \in X} x_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (8)$$

O primeiro teorema mostra que as memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} formam uma adjunção em \mathcal{X} .

Teorema 1. *Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\}$, defina as memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} através de (1), (2) e (3). Neste caso, o par $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ é uma adjunção em \mathcal{X} , ou seja, a seguinte relação é verdadeira para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$:*

$$\mathcal{W}(\mathbf{y}) \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} \leq_{\mathcal{X}} \mathcal{M}(\mathbf{x}). \quad (9)$$

Demonstração. A prova deste teorema segue das seguintes equivalências que são verdadeiras para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathbf{y}) \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{x} &\Leftrightarrow [\mathcal{W}(\mathbf{y})]_j \leq_{\mathbb{V}} x_j, \quad \forall j \in \mathcal{N}, &&\Leftrightarrow \bigvee \{y_i : (j, i) \in \mathcal{S}\} \leq_{\mathbb{V}} x_j, \quad \forall j \in \mathcal{N}, \\ &\Leftrightarrow y_i \leq_{\mathbb{V}} x_j, \quad \forall (j, i) \in \mathcal{S}, &&\Leftrightarrow y_i \leq_{\mathbb{V}} \bigwedge \{x_j : (j, i) \in \mathcal{S}\}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ &\Leftrightarrow y_i \leq_{\mathbb{V}} [\mathcal{M}(\mathbf{x})]_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}, &&\Leftrightarrow \mathbf{y} \leq_{\mathcal{X}} \mathcal{M}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

A adjunção entre \mathcal{M} e \mathcal{W} pode ser usada para enunciar as seguintes propriedades a respeito destes modelos de memória.

Corolário 2. *Para qualquer conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\}$, as memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} dadas por (1), (2) e (3) realizam uma dilatação e uma erosão da morfologia matemática. Em outras palavras, as seguintes equações permanecem verdadeiras para todo subconjunto $X \subseteq \mathcal{X}$.*

$$\mathcal{W}\left(\bigvee X\right) = \bigvee_{\mathbf{x} \in X} \mathcal{W}(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \mathcal{M}\left(\bigwedge X\right) = \bigwedge_{\mathbf{x} \in X} \mathcal{M}(\mathbf{x}).$$

Além disso, as memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} estão relacionadas como segue para todo padrão de entrada $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$:

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}) = \bigwedge \{\mathbf{y} \in \mathcal{X} : \mathbf{x} \leq_{\mathcal{X}} \mathcal{M}(\mathbf{y})\} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(\mathbf{x}) = \bigvee \{\mathbf{y} \in \mathcal{X} : \mathcal{W}(\mathbf{y}) \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{x}\}. \quad (10)$$

Demonstração. O resultado segue do Teorema 3.13 e da Proposição 3.14 da referência [9]. □

Além do fato das memórias \mathcal{M} e \mathcal{W} realizarem, respectivamente, uma erosão e uma dilatação, estes operadores também representam uma abertura e um fechamento da morfologia matemática [9, 11]. Lembre-se que um operador ψ em um reticulado completo é uma abertura se for idempotente ($\psi^2 = \psi$), crescente ($\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ implica $\psi(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{y})$) e anti-extensivo ($\psi(\mathbf{x}) \leq \mathbf{x}$). Dualmente, ψ é um fechamento se for idempotente, crescente e extensivo ($\mathbf{x} \leq \psi(\mathbf{x})$). Aberturas e fechamentos ocorrem em diversos ramos da matemática como a topologia [9]. Na morfologia matemática, estes operadores são usados, por exemplo, em granulometria [12], e também podem ser usados para recuperar imagens corrompidas por ruído.

Teorema 3. Para qualquer conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\}$, as memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} dadas por (1), (2) e (3) realizam um fechamento e uma abertura, respectivamente.

Demonstração. Mostraremos que \mathcal{W} é um fechamento. A demonstração que \mathcal{M} é uma abertura segue de forma análoga.

Segue da operação de supremo que o modelo de memória \mathcal{W} é crescente e extensivo, mostraremos que \mathcal{W} é idempotente. De fato, dado um padrão $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, defina $\mathbf{y} = \mathcal{W}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{z} = \mathcal{W}(\mathbf{y})$, vamos mostrar que $\mathbf{z} = \mathbf{y}$.

Por um lado, para qualquer $i \in \mathcal{N}$, tem-se

$$z_i = [\mathcal{W}(\mathbf{y})]_i = \bigvee \{y_j : (i, j) \in \mathcal{S}\} = y_{j^*},$$

onde j^* é um índice tal que $(i, j^*) \in \mathcal{S}$ e $y_j \leq_{\mathbb{V}} y_{j^*}$ para todo j tal que $(i, j) \in \mathcal{S}$. Semelhantemente,

$$y_{j^*} = [\mathcal{W}(\mathbf{x})]_{j^*} = \bigvee \{x_k : (j^*, k) \in \mathcal{S}\} = x_{k^*},$$

para algum índice k^* tal que $(j^*, k^*) \in \mathcal{S}$. Note, contudo, que $(i, j^*) \in \mathcal{S}$ e $(j^*, k^*) \in \mathcal{S}$ se, e somente se, as desigualdades ocorrem $x_{k^*}^{\xi} \leq_{\mathbb{V}} x_{j^*}^{\xi} \leq_{\mathbb{V}} x_i^{\xi}$, para todo $\xi = 1, \dots, p$, conseqüentemente $(i, k^*) \in \mathcal{S}$ e

$$y_i = [\mathcal{W}(\mathbf{x})]_i = \bigvee \{x_k : (i, k) \in \mathcal{S}\} \geq_{\mathbb{V}} x_{k^*} = z_i. \quad (11)$$

Como $y_i \geq_{\mathbb{V}} z_i$ para todo $i \in \mathcal{N}$, segue que $\mathbf{y} \geq_{\mathcal{X}} \mathbf{z}$. Por outro lado, $\mathbf{y} \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{z}$ pela extensividade de \mathcal{W} . Portanto, tem-se a igualdade $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. □

O próximo corolário caracteriza os padrões recordados pelas memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} em termos de seus pontos fixos. Em outras palavras, os padrões recordados pela \mathcal{W} representam o menor ponto fixo do modelo, maior ou igual ao padrão de entrada \mathbf{x} . Por dualidade, os padrões recordados pela \mathcal{M} representam o maior ponto fixo do modelo, menor ou igual ao padrão de entrada.

Lembre-se que o domínio de invariância de um operador $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é o conjunto dos pontos fixos de ψ , ou seja, $Inv(\psi) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \psi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$. Note que ambos $Inv(\mathcal{W})$ e $Inv(\mathcal{M})$ são subconjuntos de \mathcal{X} . O corolário do Teorema 3 afirma que todo subconjunto $X \subseteq Inv(\mathcal{W})$ possui um ínfimo em $Inv(\mathcal{W})$, ou seja, $Inv(\mathcal{W})$ é *inf-fechado*. Por dualidade, $Inv(\mathcal{M})$ é *sup-fechado*, o que implica que o $\bigvee X \in Inv(\mathcal{M})$ para qualquer subconjunto $X \subseteq Inv(\mathcal{M})$. O Corolário 4 também relaciona os padrões recordados pelas memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} com seus domínios de invariância.

Corolário 4. Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\}$, defina as memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} através de (1), (2) e (3). Os conjuntos $Inv(\mathcal{W})$ e $Inv(\mathcal{M})$ são *inf-fechados* e *sup-fechados*, respectivamente. Além disso, as seguintes equações são verdadeiras para qualquer padrão de entrada $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}) = \bigwedge \{\mathbf{y} \in Inv(\mathcal{W}) : \mathbf{x} \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{y}\} \quad e \quad \mathcal{M}(\mathbf{x}) = \bigvee \{\mathbf{y} \in Inv(\mathcal{M}) : \mathbf{y} \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{x}\}. \quad (12)$$

Demonstração. Segue do Teorema 3 que \mathcal{W} é um fechamento e \mathcal{M} uma abertura. Portanto, este corolário segue diretamente do Lema 3.22 e do Teorema 3.23 da referência [9]. □

O Corolário 4 fornece informações sobre a tolerância a ruído das memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} . Especificamente, a memória \mathcal{W} consegue recordar um padrão original \mathbf{x}^{ξ} somente se $\mathbf{x} \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{x}^{\xi}$. Dualmente, \mathcal{M} consegue recordar \mathbf{x}^{ξ} somente se $\mathbf{x} \geq_{\mathcal{X}} \mathbf{x}^{\xi}$.

O teorema seguinte revela que as memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} são invariantes sob certos tipos de transformações. Antes de enunciar o Teorema 5 recordemos que um operador $\phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é um *endomorfismo* em um reticulado completo \mathbb{V} se preserva a estrutura de \mathbb{V} [8]. Em outras palavras, ϕ é um endomorfismo em um reticulado completo \mathbb{V} se as seguintes equações são verdadeiras para todo subconjunto $X \subseteq \mathbb{V}$:

$$\phi\left(\bigvee X\right) = \bigvee_{x \in X} \phi(x) \quad e \quad \phi\left(\bigwedge X\right) = \bigwedge_{x \in X} \phi(x). \quad (13)$$

Teorema 5. Considere um endomorfismo ϕ em um reticulado completo \mathbb{V} e seja $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ uma aplicação definida como $\Phi(\mathbf{x}) = [\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)]$ para todo $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathcal{X}$. Para qualquer conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\}$ as memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} dadas por (1), (2) e (3) são invariantes sob Φ , ou seja, $\mathcal{W}(\Phi(\mathbf{x})) = \Phi(\mathcal{W}(\mathbf{x}))$ e $\mathcal{M}(\Phi(\mathbf{x})) = \Phi(\mathcal{M}(\mathbf{x}))$ para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

Demonstração. As seguintes igualdades, válidas para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ e $i \in \mathcal{N}$, seguem da definição de \mathcal{W} e do fato que ϕ é um endomorfismo em \mathbb{V} :

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}(\Phi(\mathbf{x}))]_i &= [\mathcal{W}([\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_n)])]_i = \bigvee \{\phi(x_j) : (i, j) \in \mathcal{S}\} = \phi\left(\bigvee \{x_j : (i, j) \in \mathcal{S}\}\right) \\ &= \phi\left([\mathcal{W}(\mathbf{x})]_i\right) = [\Phi(\mathcal{W}(\mathbf{x}))]_i. \end{aligned}$$

A prova que a memória \mathcal{M} é invariante sob Φ segue de forma análoga. □

Uma consequência imediata do Teorema 5 é que os conjuntos $Inv(\mathcal{W})$ e $Inv(\mathcal{M})$ são invariantes sob endomorfismos. Em outras palavras, se $\mathbf{x} \in Inv(\mathcal{W})$, então $\Phi(\mathbf{x}) \in Inv(\mathcal{W})$. Semelhantemente, se $\mathbf{x} \in Inv(\mathcal{M})$, então $\Phi(\mathbf{x})$ pertence a $Inv(\mathcal{M})$. O Teorema 6 revela algumas características do domínio de invariância das memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} .

Teorema 6. *Para qualquer conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathcal{X}$, o domínio de invariância das memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} dadas por (1), (2) e (3) coincidem e incluem todas as memórias fundamentais. Além disso, o conjunto $\mathcal{I} = Inv(\mathcal{W}) = Inv(\mathcal{M})$ é um subreticulado completo em \mathcal{X} com relação a ordem $\leq_{\mathcal{X}}$, ou seja, $\bigvee X \in \mathcal{I}$ e $\bigwedge X \in \mathcal{I}$ para todo $X \subseteq \mathcal{I}$.*

Demonstração. Mostraremos, primeiramente, que $\mathcal{W}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$, ou seja, $\mathbf{x}^\xi \in Inv(\mathcal{W})$, para todo $\xi = 1, \dots, p$.

De fato, tem-se da definição do conjunto \mathcal{S} que $(i, j) \in \mathcal{S}$ se, e somente se $x_j^\xi \leq x_i^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, p$. Além disso, para qualquer $\xi \in \{1, \dots, p\}$ e $i \in \mathcal{N}$, a desigualdade $x_j^\xi \leq x_i^\xi$ permanece verdadeira para todo índice j tal que $(i, j) \in \mathcal{S}$. Tomando o supremo de x_j^ξ , concluímos que

$$[\mathcal{W}(\mathbf{x}^\xi)]_i = \bigvee \{x_j^\xi : (i, j) \in \mathcal{S}\} \leq_{\mathbb{V}} x_i^\xi.$$

Logo a desigualdade $\mathcal{W}(\mathbf{x}^\xi) \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{x}^\xi$ é verdadeira para todo $\xi = 1, \dots, p$. Por outro lado, segue da extensividade de \mathcal{W} a seguinte desigualdade $\mathcal{W}(\mathbf{x}^\xi) \geq_{\mathcal{X}} \mathbf{x}^\xi$. Portanto, a igualdade $\mathcal{W}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ é verdadeira para todo $\xi = 1, \dots, p$.

Mostraremos agora que $Inv(\mathcal{W})$ e $Inv(\mathcal{M})$ são iguais, ou seja, $\mathbf{x} \in Inv(\mathcal{W})$ implica que $\mathbf{x} \in Inv(\mathcal{M})$ uma vez que a recíproca é análoga. Suponha que $\mathbf{x} = \mathcal{W}(\mathbf{x})$ e seja $\mathbf{z} = \mathcal{M}(\mathbf{x})$. Verifiquemos que ambas desigualdades $\mathbf{x} \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{z}$ e $\mathbf{z} \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{x}$ ocorrem. A primeira desigualdade segue de (10). Especificamente, tem-se que $\mathbf{x} \in \{\mathbf{y} \in \mathcal{X} : \mathcal{W}(\mathbf{y}) \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{x}\}$, pois $\mathbf{x} = \mathcal{W}(\mathbf{x})$ por hipótese. Além disso, como o supremo de um conjunto é maior ou igual que qualquer elemento do conjunto, concluímos que

$$\mathbf{z} = \mathcal{M}(\mathbf{x}) = \bigvee \{\mathbf{y} \in \mathcal{X} : \mathbf{x} \geq_{\mathcal{X}} \mathcal{W}(\mathbf{y})\} \geq_{\mathcal{X}} \mathbf{x}.$$

A desigualdade $\mathbf{z} \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{x}$ segue do fato que \mathcal{M} é uma abertura, ou seja, \mathcal{M} é anti-extensivo, logo $\mathbf{z} = \mathcal{M}(\mathbf{x}) \leq_{\mathcal{X}} \mathbf{x}$.

Finalmente, do Corolário 4 segue que os conjuntos $Inv(\mathcal{W})$ e $Inv(\mathcal{M})$ são inf-fechados e sup-fechados. Como $\mathcal{I} = Inv(\mathcal{W}) = Inv(\mathcal{M})$, o conjunto $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{X}$ é inf-fechado e sup-fechado. Em outras palavras, para qualquer subconjunto $X \subseteq \mathcal{I}$, os elementos $\bigwedge X$ e $\bigvee X$ pertencem a \mathcal{I} . Então, o domínio de invariância \mathcal{I} de \mathcal{W} e \mathcal{M} é um subreticulado completo em \mathcal{X} . \square

Por um lado, o Teorema 6 afirma que as memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} exibem ótima capacidade absoluta de armazenamento. Por outro lado, ele também revela que as memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} possuem uma grande quantidade de memórias espúrias. De fato, qualquer elemento no conjunto $\mathcal{I} \setminus \{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\}$ é uma memória espúria de ambas \mathcal{W} e \mathcal{M} . A seguinte definição recursiva, que generaliza a noção de polinômio reticulado [8], caracteriza uma grande família de elementos de \mathcal{I} .

Definição 1. *(Polinômio Reticulado Endomórfico) Toda memória fundamental \mathbf{x}^ξ é um polinômio reticulado endomórfico em $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathcal{X}$. Dados dois polinômios reticulados endomórficos \mathbf{y} e \mathbf{z} e dois endomorfismos componente a componente $\Phi(\mathbf{y})$ e $\Psi(\mathbf{z})$ em \mathcal{X} , o máximo $\Phi(\mathbf{y}) \vee \Psi(\mathbf{z})$ e o mínimo $\Phi(\mathbf{y}) \wedge \Psi(\mathbf{z})$ são também polinômios reticulados endomórficos em $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\}$.*

O Teorema 6 e a noção de polinômio reticulado endomórfico podem ser combinados no seguinte corolário relativo aos pontos fixos das memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} .

Corolário 7. *Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{V}^n$, defina as memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} dadas por (1), (2) e (3). Então, qualquer polinômio reticulado endomórfico no conjunto de memórias fundamentais é um ponto fixo de \mathcal{W} e \mathcal{M} .*

Demonstração. A demonstração deste corolário segue dos Teoremas 5 e 6. Segue do Teorema 6, que os polinômios reticulados endomórficos $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p$ são todos pontos fixos de ambas \mathcal{W} e \mathcal{M} , ou seja, $\mathbf{x}^\xi \in \mathcal{I}$ para todo $\xi = 1, \dots, p$. Agora, assumamos que $\mathbf{y} \in \mathcal{I}$ e $\mathbf{z} \in \mathcal{I}$ sejam dois polinômios reticulados endomórficos em $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\}$. Dados dois endomorfismos componente a componente Φ e Ψ em \mathbb{V}^n , pelo Teorema 5, os padrões $\Phi(\mathbf{y})$ e $\Psi(\mathbf{z})$ também pertencem a \mathcal{I} . Como \mathcal{I} é um subreticulado completo em \mathbb{V}^n , os polinômios reticulados endomórficos $\Phi(\mathbf{y}) \vee \Psi(\mathbf{z})$ e $\Phi(\mathbf{y}) \wedge \Psi(\mathbf{z})$ são também pontos fixos de \mathcal{W} e \mathcal{M} . \square

4. Relação entre as MAERCs e as Memórias Autoassociativas Morfológicas em Tons de Cinza

Nesta seção, faremos uma breve discussão sobre a relação entre as *memórias autoassociativas esparsas em reticulados* e as *memórias autoassociativas morfológicas (gray-scale MAMs)* de Sussner and Ritter [3, 5, 13, 14]. Com este propósito, supomos que as memórias autoassociativas esparsas em reticulados sejam definidas no conjunto dos números reais estendidos, ou seja, $\mathbb{V} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, e $\mathcal{X} = \mathbb{V}^n$ denota o conjunto ao qual pertencem os padrões em tons de cinza.

Em vista da estrutura dos reais, o reticulado completo \mathbb{V} pode ser equipado com duas operações binárias adicionais “+” e “+’”, que coincidem com a operação usual de adição em \mathbb{R} . Estas duas operações são estendidas como segue para $+\infty$ e $-\infty$:

$$(-\infty) + (+\infty) = (+\infty) + (-\infty) = (-\infty) \quad \text{e} \quad (-\infty) +' (+\infty) = (+\infty) +' (-\infty) = (+\infty). \quad (14)$$

Dessa forma, assumimos que $\mathbb{V} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ constitui uma extensão de reticulado limitado com ordem de grupo [15].

Existem dois tipos de produtos de matrizes com entradas em \mathbb{V} . Dadas as matrizes $A \in \mathbb{V}^{m \times p}$ e $B \in \mathbb{V}^{p \times n}$, as matrizes $C = A \boxtimes B$ e $D = A \boxdot B$, chamadas respectivamente de produto máximo e produto mínimo de A e B , são definidas pelas seguintes equações, para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$:

$$c_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^p (a_{i\xi} + b_{\xi j}) \quad e \quad d_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^p (a_{i\xi} + b_{\xi j}). \quad (15)$$

As memórias originais *gray-scale* MAMs de Ritter e Sussner, denotadas aqui por \mathcal{W}_{XX} e \mathcal{M}_{XX} , são definidas como segue. Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathcal{X}$, determine as matrizes $W_{XX} \in \mathbb{V}^{n \times n}$ e $M_{XX} \in \mathbb{V}^{n \times n}$ por meio das seguintes equações para todo $i, j \in \mathcal{N}$:

$$[W_{XX}]_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^p (x_i^\xi + (x_j^\xi)^*) \quad e \quad [M_{XX}]_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^p (x_i^\xi + (x_j^\xi)^*), \quad (16)$$

onde x^* , chamado o elemento conjugado de $x \in \mathbb{V}$, é definido como:

$$x^* = \begin{cases} -x, & \text{se } x \in \mathbb{R}, \\ -\infty, & \text{se } x = +\infty, \\ +\infty, & \text{se } x = -\infty. \end{cases} \quad (17)$$

Finalmente, as *gray-scale* MAMs \mathcal{W}_{XX} e \mathcal{M}_{XX} são definidas em termos do produto máximo e produto mínimo como segue para todo padrão de entrada $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$:

$$\mathcal{W}_{XX}(\mathbf{x}) = W_{XX} \boxtimes \mathbf{x} \quad e \quad \mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}) = M_{XX} \boxdot \mathbf{x}. \quad (18)$$

Antes de estabelecer uma relação entre *gray-scale* MAMs \mathcal{W}_{XX} e \mathcal{M}_{XX} e as MAERCs, recordemos da seguinte proposição a respeito das matrizes W_{XX} e M_{XX} [3].

Proposição 8. Para qualquer conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathcal{X}$, as matrizes $W_{XX} \in \mathbb{V}^{n \times n}$ e $M_{XX} \in \mathbb{V}^{n \times n}$ dadas por (16) satisfazem as equações:

$$W_{XX} = \bigvee \{A \in \mathbb{V}^{n \times n} : A \boxtimes \mathbf{x}^\xi \leq \mathbf{x}^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p\}, \quad (19)$$

e

$$M_{XX} = \bigwedge \{B \in \mathbb{V}^{n \times n} : B \boxdot \mathbf{x}^\xi \geq \mathbf{x}^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p\}. \quad (20)$$

A Proposição 8 afirma que as MAMs definidas em (18) são ótimas no seguinte sentido: se existe uma memória \mathcal{A} , dada por $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = A \boxtimes \mathbf{x}$, tal que $\mathcal{A}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ para todo ξ , então a MAM \mathcal{W}_{XX} também satisfaz $\mathcal{W}_{XX}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ e $\mathcal{W}_{XX}(\mathbf{x}) \geq \mathcal{A}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Semelhantemente, se existe uma memória \mathcal{B} tal que $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = B \boxdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, então $\mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ e $\mathcal{B}(\mathbf{x}) \geq \mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

O Teorema 9 formaliza a relação entre as MAERCs \mathcal{W} e \mathcal{M} e as *gray-scale* MAMs \mathcal{W}_{XX} e \mathcal{M}_{XX} .

Teorema 9. Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathcal{X}$, defina as memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} através de (1), (2), e (3). Neste caso, existe uma única matriz de pesos sinápticos $W \in \mathbb{V}^{n \times n}$ e uma matriz $M \in \mathbb{V}^{n \times n}$ tais que as seguintes equações são verdadeiras para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$:

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}) = W \boxtimes \mathbf{x} \quad e \quad \mathcal{M}(\mathbf{x}) = M \boxdot \mathbf{x}. \quad (21)$$

Além disso, estas duas matrizes podem ser obtidas a partir das matrizes de pesos sinápticos W_{XX} e M_{XX} definidas em (16) como segue para todo $i, j \in \mathcal{N}$:

$$w_{ij} = \mathcal{T}_-([W_{XX}]_{ij}) \quad e \quad m_{ij} = \mathcal{T}_+([M_{XX}]_{ij}), \quad (22)$$

onde $\mathcal{T}_- : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ e $\mathcal{T}_+ : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ são os operadores dados por:

$$\mathcal{T}_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq 0, \\ -\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad e \quad \mathcal{T}_+(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (23)$$

Demonstração. Faremos a prova somente para a memória \mathcal{W} , uma vez que a prova para a memória \mathcal{M} segue de forma análoga. Seja \mathcal{S} o conjunto das junções sinápticas da memória \mathcal{W} e defina a matriz $W \in \mathbb{V}^{n \times n}$ da seguinte forma:

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } (i, j) \in \mathcal{S}, \\ -\infty & \text{se } (i, j) \notin \mathcal{S}. \end{cases}$$

Considerando a operação $+$ definida em (14), e o fato que 0 é a identidade em $+$, e que $-\infty$ é o menor elemento de \mathbb{V} , as seguintes igualdades são verdadeiras para qualquer $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ e para todo $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} [W \boxtimes \mathbf{x}]_i &= \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + x_j) = \left[\bigvee \{(0 + x_j) : (i, j) \in \mathcal{S}\} \right] \vee \left[\bigvee \{(-\infty + x_j) : (i, j) \notin \mathcal{S}\} \right] \\ &= \left[\bigvee \{x_j : (i, j) \in \mathcal{S}\} \right] \vee [-\infty] = \bigvee \{x_j : (i, j) \in \mathcal{S}\} = [\mathcal{W}(\mathbf{x})]_i. \end{aligned}$$

Agora, suponha que exista uma outra matriz $A \in \mathbb{V}^{n \times n}$ tal que $\mathcal{W}(\mathbf{x}) = A \boxtimes \mathbf{x}$ para qualquer $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ e seja $\mathbf{e}_k = [e_{k1}, \dots, e_{kn}]^T \in \mathbb{V}^n$ vetores definidos como segue para todo $j, k \in \mathcal{N}$:

$$e_{kj} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } k \neq j, \\ 0, & \text{se } k = j. \end{cases}$$

Mostraremos a seguir que $a_{ik} = w_{ik}$ para todo $i, k \in \mathcal{N}$:

$$a_{ik} = \bigvee_{j=1}^n (a_{ij} + e_{kj}) = [A \boxtimes \mathbf{e}_k]_i = [\mathcal{W}(\mathbf{e}_k)]_i = [W \boxtimes \mathbf{e}_k]_i = \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + e_{kj}) = w_{ik}.$$

Concluindo, note que ambas w_{ij} e $\mathcal{T}_-([W_{XX}]_{ij})$ possuem somente os valores 0 e $-\infty$. Adicionalmente, tem-se

$$\begin{aligned} w_{ij} = 0 &\Leftrightarrow (i, j) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x_j^\xi \leq x_i^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p \Leftrightarrow x_i^\xi +' (x_j^\xi)^* \geq 0, \forall \xi = 1, \dots, p \\ &\Leftrightarrow \bigwedge_{\xi=1}^p (x_i^\xi +' (x_j^\xi)^*) \geq 0 \Leftrightarrow [W_{XX}]_{ij} \geq 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}_-([W_{XX}]_{ij}) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $w_{ij} = \mathcal{T}_-([W_{XX}]_{ij})$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. □

O Teorema 9 mostra que as memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} podem ser obtidas a partir das MAMs \mathcal{W}_{XX} e \mathcal{M}_{XX} simplificando a matriz de pesos sinápticos, especificamente, removendo pesos sinápticos. Em vista da Proposição 8, podemos esperar que as *gray-scale* MAMs superem as MAERCs na reconstrução de padrões. Esta observação foi confirmada computacionalmente em [6] e pode ser formalizada em termos do seguinte corolário:

Corolário 10. Para qualquer conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathcal{X}$, o domínio de invariância \mathcal{I} das memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} definidas por (1), (2), e (3) incluem todos os pontos fixos das *gray-scale* MAMs \mathcal{W}_{XX} e \mathcal{M}_{XX} definidas por (16) e (18), ou seja, $\text{Inv}(\mathcal{W}_{XX}) \subseteq \mathcal{I}$ e $\text{Inv}(\mathcal{M}_{XX}) \subseteq \mathcal{I}$.

Demonstração. Primeiramente, recordemos que as *gray-scale* MAMs \mathcal{W}_{XX} e \mathcal{M}_{XX} constituem, respectivamente, um fechamento e uma abertura da morfologia matemática [3, 5]. Do Teorema 9 segue que as desigualdades $\mathcal{W}(\mathbf{x}) \leq \mathcal{W}_{XX}(\mathbf{x})$ e $\mathcal{M}_{XX}(\mathbf{x}) \leq \mathcal{M}(\mathbf{x})$ ocorrem para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Portanto, do Teorema 3.24 em [9], concluímos que $\text{Inv}(\mathcal{W}_{XX}) \subseteq \mathcal{I}$ e $\text{Inv}(\mathcal{M}_{XX}) \subseteq \mathcal{I}$. □

Concluímos esta seção salientando que as MAERCs podem ser obtidas das *gray-scale* MAMs excluindo algumas ligações sinápticas. Consequentemente, as MAERCs exibem tolerância a ruído inferior com relação a padrões corrompidos com ruído positivo ou negativo. A principal vantagem das MAERCs sobre as *gray-scale* MAMs se refere a aspectos computacionais e teóricos. De fato, os modelos esparsos usualmente requerem muito menos esforço computacional que as *gray-scale* MAMs. Do ponto de vista teórico, as MAERCs são definidas em um reticulado completo enquanto que as *gray-scale* MAMs são definidas em uma extensão de reticulado limitado com ordem de grupo que, além da estrutura de reticulado, requer duas operações binárias adicionais.

5. Conclusão

Neste artigo, demonstramos algumas propriedades das MAERCs \mathcal{W} e \mathcal{M} , que são modelos de memórias autoassociativas definidas no produto cartesiano $\mathcal{X} = \mathbb{V}^n$ de um reticulado completo \mathbb{V} . Especificamente, provamos os seguintes resultados sobre as MAERCs definidas em (2) e (3), com o conjunto de junções sinápticas \mathcal{S} dado por (1):

1. Ambas MAERCs exibem ótima capacidade absoluta de armazenamento (Teorema 6). Em outras palavras, podem ser armazenados nestas memórias quantos padrões forem desejados.
2. Cada padrão de saída permanece estável sob repetidas aplicações das MAERCs (Teorema 3). Em outras palavras, ambas MAERCs exibem convergência em um único passo se empregadas com *feedback*.

3. O padrão recordado pela MAERC \mathcal{W} representa o menor ponto fixo do modelo maior ou igual ao padrão de entrada \mathbf{x} (Corolário 4). Assim, esta memória recorda um padrão original $\mathbf{x}^\xi = [x_1^\xi, \dots, x_n^\xi]$ corretamente somente se as componentes da entrada $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ satisfizerem a desigualdade $x_i \leq x_i^\xi$ para todo $i = 1, \dots, n$.
Dualmente, o padrão recordado pela MAERC \mathcal{M} representa o maior ponto fixo do modelo menor ou igual ao padrão de entrada. Desta forma, um padrão original \mathbf{x}^ξ é recordado corretamente por uma memória \mathcal{M} somente se $x_i^\xi \leq x_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.
4. O conjunto dos pontos fixos das memórias \mathcal{W} e \mathcal{M} incluem os padrões originais no conjunto de memórias fundamentais, bem como um grande número de padrões espúrios (Teorema 6). De fato, qualquer polinômio reticulado endomórfico no conjunto de memórias fundamentais é uma memória espúria das MAERCs \mathcal{W} e \mathcal{M} (Corolário 7). Lembre-se que um padrão espúrio é uma memória que foi armazenada involuntariamente no modelo.

É importante observar que as propriedades listadas acima aparecem, sem demonstração e para um reticulado completo particular, em [6]. Nesse artigo provamos e generalizamos estes resultados para um reticulado completo \mathbb{V} arbitrário. Também introduzimos o conceito de polinômio reticulado endomórfico, que generaliza a noção de polinômio reticulado de Birkhoff. Finalmente, estabelecemos uma relação entre as MAERCs e as *gray-scale* MAMs de Ritter e Sussner. Em particular, mostramos que as MAERCs exibem tolerância a ruído inferior com relação a padrões corrompidos com ruído positivo ou negativo.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Austin. “Associative Memory”. In *Handbook of Neural Computation*, edited by E. Fiesler and R. Beale, pp. F1.4:1–F1.4:7. Oxford University Press, 1997.
- [2] M. H. Hassoun and P. B. Watta. “Associative Memory Networks”. In *Handbook of Neural Computation*, edited by E. Fiesler and R. Beale, pp. C1.3:1–C1.3:14. Oxford University Press, 1997.
- [3] G. X. Ritter, P. Sussner and J. L. D. de Leon. “Morphological Associative Memories”. *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 9, no. 2, pp. 281–293, 1998.
- [4] R. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 166*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [5] P. Sussner and M. E. Valle. “Grayscale Morphological Associative Memories”. *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 17, no. 3, pp. 559–570, May 2006.
- [6] M. E. Valle. “A Class of Sparsely Connected Autoassociative Morphological Memories for Large Color Images”. *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 20, no. 6, pp. 1045–1050, June 2009.
- [7] M. E. Valle and D. M. G. Vicente. “Some Experimental Results on Sparsely Connected Autoassociative Morphological Memories for the Reconstruction of Color Images Corrupted by Either Impulsive or Gaussian Noise”. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN 2011)*, San Jose, CA, August 2011. Accepted for publication.
- [8] G. Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence, third edition, 1993.
- [9] H. Heijmans. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.
- [10] M. H. Hassoun. *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [11] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, New York, 1988.
- [12] H. J. A. M. Heijmans. “Mathematical Morphology: A Modern Approach in Image Processing Based on Algebra and Geometry”. *SIAM Review*, vol. 37, no. 1, pp. 1–36, 1995.
- [13] G. X. Ritter and P. Sussner. “An Introduction to Morphological Neural Networks”. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, pp. 709–717, Vienna, Austria, 1996.
- [14] G. X. Ritter and P. Sussner. “Morphological Neural Networks”. In *Intelligent Systems: A Semiotic Perspective; Proceedings of the 1996 International Multidisciplinary Conference*, pp. 221–226, Gaithersburg, Maryland, 1996.
- [15] P. Sussner and E. L. Esmi. “Morphological Perceptrons with Competitive Learning: Lattice-Theoretical Framework and Constructive Learning Algorithm”. *Information Sciences*, vol. 181, no. 10, pp. 1929–1950, May 2011.