X Congresso Brasileiro de Inteligência Computacional (CBIC'2011), 8 a 11 de Novembro de 2011, Fortaleza, Ceará

Controladores Fuzzy Adaptativos $\mathcal{H}_\infty$ Não-Lineares Aplicados a Manipuladores com Restrições de Posição e Força

Samuel L. Nogueira, Adriano A. G. Siqueira
Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de São Paulo em São Carlos
{samuel,siqueira}@sc.usp.br

Tatiana F. P. A. T. Pazelli, Marco H. Terra
Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de São Paulo em São Carlos
tatianapazelli@usp.br, terra@sc.usp.br

Resumo – Neste trabalho é apresentado um estudo comparativo de controladores $\mathcal{H}_\infty$ não-lineares aplicados a um manipulador robótico com restrições de posição e força. O problema é solucionado por duas diferentes estratégias: (1) o modelo do sistema é considerado completamente desconhecido e uma técnica de inteligência artificial, baseada em sistemas fuzzy, é aplicada para estimar o modelo completo; (2) o modelo nominal do robô é considerado conhecido e a técnica inteligentes é aplicada para estimar somente incertezas paramétricas, dinâmicas não-modeladas e distúrbios externos. Um controlador por estrutural variável é acrescentado afim de atenuar os erros de estimativa gerado pelo sistema inteligente. O critério $\mathcal{H}_\infty$ atua na atenuação dos efeitos de distúrbios externos. Resultados experimentais baseados em um manipulador planar de três juntas rotacionais são apresentados.

Palavras-chave – Manipuladores restritos, controlador $\mathcal{H}_\infty$, sistemas fuzzy, controle por estrutura variável

Abstract – In this work, we present a comparative study of $\mathcal{H}_\infty$ nonlinear controllers applied to a manipulator subject to position and force constraints. The problem is solved by two different strategies: (1) the system model is considered completely unknown and intelligent techniques are used to estimate the complete model; (2) the nominal model of the robot is considered known and intelligent techniques are used to estimate parametric uncertainties, nonmodeled dynamics and external disturbances. A controller based on variable structure is added to decline the estimation errors caused by intelligent systems. The $\mathcal{H}_\infty$ criterion acts in the attenuation of external disturbances effects. Experimental results based on a planar manipulator with three rotational joints are presented.

Keywords – Constrained manipulators, $\mathcal{H}_\infty$ control, fuzzy systems, variable structure control.

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho trata do controle de força e posicionamento de robôs manipuladores. Em aplicações que utilizam esse tipo de sistema, algumas adversidades podem deteriorar a representatividade do modelo nominal, gerando por exemplo: incertezas paramétricas, dinâmicas não-modeladas e distúrbios externos.

Estratégias para o controle robusto da posição de manipuladores tem sido amplamente difundidas na literatura. Particularmente, em [1], um controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ baseado em redes neurais foi desenvolvido para solucionar o problema de acompanhamento de posição. Uma formulação complementar à estratégia proposta em [1] foi apresentada em [2]. Acrescentando à lei de atuação um controlador por estrutura variável (*VSC - Variable Structure Control*), a restrição imposta ao erro de estimativa em [1] foi enfraquecida, e portanto, basta que o erro de estimativa gerado pela rede neural seja limitado por uma função dependente de estado ao invés de ser necessariamente integrável.

Com o objetivo de garantir um desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para restrições robóticas holonômicas, um controlador híbrido de posição/força foi desenvolvido em [3], baseado no modelo nominal e na técnica adaptativa via parametrização linear. No entanto, dinâmicas não-modeladas geralmente estão presentes em sistemas reais e seus efeitos podem diminuir consideravelmente o desempenho deste tipo de procedimento. Incorporando um sistema inteligente adaptativo para compensar as dinâmicas não-modeladas, os autores de [4] puderam, de maneira unificada, aumentar a eficiência do modelo adaptativo no tratamento desse tipo de problema.

Assim, com base na teoria apresentada em [1], [2], [3] e [4], este trabalho apresenta um controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ baseado em sistemas fuzzy e *VSC* para manipuladores com restrição de posicionamento e força. Formulando o problema em duas abordagens: a primeira considerando o modelo do sistema completamente desconhecido; e a segunda considerando conhecido o modelo nominal do robô e estimando somente os efeitos dinâmicos de incertezas paramétricas, dinâmicas não-modeladas e distúrbios externos; este trabalho complementa os resultados apresentados em [4]. Além disso, ao acrescentar a técnica de VSC, é possível também observar a melhora no desempenho em relação a resultados apresentados em [5].

Resultados experimentais foram obtidos utilizando um manipulador planar de três elos acoplado a um sensor de força, sujeito a restrição de posição e força no efetuador. Um estudo comparativo é apresentado, avaliando a aplicação do sistema inteligente e o desempenho das abordagens propostas.

2. DESCRIÇÃO DO MODELO

Considere um manipulador com restrições holonômicas em seu efetuador. Este manipulador pode ser representado por *n* elos conectados por *n* juntas rotacionais, sendo nomeados respectivamente por *l* e q. A restrição holonômica utilizada consiste de uma superfície rígida sobre a qual o efetuador robótico está restrito. O ângulo entre o efetuador e a restrição poderá ser especificado pelo projetista. Veja a representação deste manipulador na Figura 1.

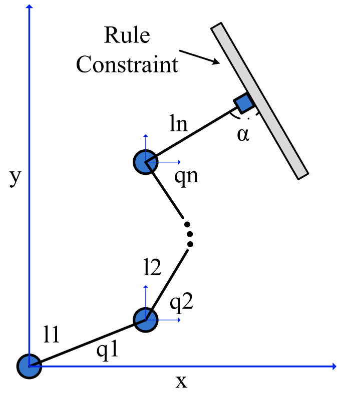


Figura 1: Manipulador robótico com *n* elos.

2.1 Modelo do Manipulador com Restrição

A equação dinâmica da restrição robótica é dada pela teoria de Lagrange como

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau + J^T(q)\lambda + d, \tag{1}$$

sendo $M(q) \in \Re^{n\times n}$ a matriz de inércia simétrica e positiva, $C(q,\dot{q}) \in \Re^{n\times n}$ a matriz de Coriolis e termos centrífugos, $G(q) \in \Re^n$ os torques devido a força gravitacional, $\tau \in \Re^n$ os torques aplicados, $\lambda \in \Re^m$ o vetor dos multiplicadores generalizados de Lagrange associados com as restrições, $J(q) = (\partial\phi/\partial q) \in \Re^{m\times n}$ a matriz Jacobiana que relaciona os multiplicadores Lagrangianos no espaço da restrição para o espaço das juntas, e $d \in \Re^n$ representa os distúrbios externos e dinâmicas não modeladas do sistema. Note que f denota a força de reação devido a restrição holonômica. Isto restringe a posição do efetuador e consequentemente os valores de q.

Incertezas paramétricas em (1) podem ser inseridas dividindo-se as matrizes paramétricas $M(q)$, $C(q,\dot{q})$, $G(q)$ e f em uma parte nominal e uma contendo incertezas:

$$\begin{aligned} &M(q) = M_0(q) + \Delta M(q),\\ &C(q,\dot{q}) = C_0(q,\dot{q}) + \Delta C(q,\dot{q}),\\ &G(q) = G_0(q) + \Delta G(q),\\ &f = f_0 + \Delta f, \end{aligned}$$

sendo $M_0(q)$, $C_0(q,\dot{q})$, $G_0(q)$ e f_0 as matrizes nominais e $\Delta M(q)$, $\Delta C(q,\dot{q})$, $\Delta G(q)$ e Δf as incertezas paramétricas.

A Equação (1) pode ser reescrita como:

$$M_0(q)\ddot{q} + C_0(q,\dot{q})\dot{q} + G_0(q) = \tau + f_0 + \omega_\tau, \tag{2}$$

com $\omega_\tau = -\Delta M(q)\ddot{q} - \Delta C(q,\dot{q})\dot{q} + \Delta f + \tau_d$. Para simplificar a notação, o índice 0 referente ao sistema nominal será omitido no decorrer texto.

2.2 Modelagem da restrição

As m restrições de superfífice são descritas pela seguinte relação holonômica:

$$\phi(q) = 0_m, \tag{3}$$

sendo $\phi(q) : \Re^n \to \Re^m$ uma função suave.

As forças de restrição são dadas por:

$$f = J_c^T(q)\lambda, \tag{4}$$

sendo $J_c(q) = \frac{\delta\phi(q)}{\delta q} \in \Re^{m\times n}$ a matriz Jacobiana que relaciona as restrições com as variáveis controladas do robô e $\lambda \in \Re^m$ o vetor contendo os multiplicadores Lagrangianos generalizados associados com as restrições. Note que incertezas paramétricas também podem ser incluidas no modelo de restrição, desde que a superfície da mesma não seja considerada perfeitamente rígida, sem atrito ou mesmo que a descrição geométrica não seja completamente conhecida. Então, $\phi(q) = \Delta\phi(q)$ e $J_c(q) = J_{c_0}(q) + \Delta J_c(q)$ e assuma que $\Delta\phi$ e ΔJ_c estão implicitas em Δf na Equação (2).

2.3 Modelo com ordem reduzida

A presença de m restrições causam no manipulador a diminuição de m graus de liberdade, dessa forma, $n-m$ coordenadas linearmente independentes serão suficientes para caracterizar o movimento restrito. Então, com o objetivo de desenvolver equações dinâmicas com ordem reduzida para o sistema restrito, assumem-se as seguintes hipóteses, [6].

1. Considere que a matriz Jacobiana $J_c(q)$ tenha posto linha pleno m para todo $q \in \Re^n$. Então, o vetor q particionado como:

$$q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix},$$

sendo que $q^1 = [q_1^1 \dots q_{n-m}^1]^T$ descreve a restrição do movimento do manipulador e $q^2 = [q_1^2 \dots q_m^2]^T$ representa as demais juntas do manipulador. De acordo com o teorema da função implícita, existe um conjunto aberto $\Omega_c \subseteq \Re^{(n-m)}$ e um único C^1 mapeando $\sigma : \Omega_c \to \Re^m$ tal que $q^2 = \sigma(q^1)$ e $\phi(q^1, \sigma(q^1)) = 0, \forall q^1 \in \Omega_c$.

2. Assuma que $\Gamma = \frac{\delta\sigma(q^1)}{\delta q^1}$ é bem definido para todas as operações do manipulador de interesse. Quando diferenciamos a superfície de restrição com relação a q^1, a seguinte equação é obtida:

$$\frac{\delta\phi(q)}{\delta q^1} + \frac{\delta\phi(q)}{\delta q^2}\frac{\delta\sigma(q^1)}{\delta q^1} = J_c(q)\begin{bmatrix} I_{(n-m)} \\ \frac{\delta\sigma(q^1)}{\delta q^1} \end{bmatrix} = 0. \tag{5}$$

Definindo a matriz Jacobiana de transformação das variáveis:

$$L(q^1) = \begin{bmatrix} I_{(n-m)} \\ \frac{\delta\sigma(q^1)}{\delta q^1} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

tal que $\dot{q} = L(q^1)\dot{q}^1$, a propriedade $J_c(q)L(q^1) = L^T(q^1)J_c^T(q) = 0$ é verificada.

3. Assuma também que o efetuador já esteja em contato com a superfície de restrição, e o controle exercido sobre a força de restrição é tal que o efetuador estará sempre em contato com a superfície restrita.

Aplicando a transformação (6) em $\ddot{q} = \dot{L}(q^1)\dot{q}^1 + L(q^1)\ddot{q}^1$ na Equação (2), a seguinte formulação reduzida do modelo é obtida para um manipulador com restrição, como em [4, 7]:

$$M(q^1)L(q^1)\ddot{q}^1 + C_L(q^1, \dot{q}^1)\dot{q}^1 + G(q^1) = \tau + J_c^T(q)\lambda + \omega_\tau, \tag{7}$$

sendo $C_L(q^1, \dot{q}^1)\dot{q}^1 = M(q^1)\dot{L}(q^1) + C(q^1, \dot{q}^1)L(q^1)$.

As matrizes $M(q^1)$, $C(q^1, \dot{q}^1)$ and $G(q^1)$ em (7) são obtidas substituindo-se $q^2 = \sigma(q^1)$ e $\dot{q} = L(q^1)\dot{q}^1$ in $M(q), C(q, \dot{q})$ e $G(q)$ em (2), respectivamente. As dinâmicas do manipulador podem ser parametricamente linearizadas nesta forma reduzida como

$$M(q^1)L(q^1)\dot{s} + C_L(q^1, \dot{q}^1)s + G(q^1) = Y(q^1, \dot{q}^1, s, \dot{s})\Theta^*, \forall s \in \Re^{n-m}. \tag{8}$$

Por outro lado, pré-multiplicando ambos os lados de (7) por $L^T(q^1)$ e utilizando a propriedade da segunda hipótese acima, a equação dinâmica modificada reduzida é dada por:

$$A_L(q^1)\ddot{q}^1 + L^T(q^1)C_L(q^1, \dot{q}^1)\dot{q}^1 + L^T(q^1)G(q^1) = L^T(q^1)(\tau + \omega_\tau), \tag{9}$$

sendo $A_L(q^1) = L^T(q^1)M(q^1)L(q^1)$ simétrica e definida positiva, e a matriz $\dot{A}_L(q^1) - 2L^T(q^1)C_L(q^1, \dot{q}^1)$ anti-simétrica.

2.4 Formulação do Problema

Com base na forma reduzida (9), a dinâmica do erro no espaço de estados em sua forma reduzida será obtido nesta seção e será utilizado para se obter a realimentação de estados do controlador para o manipulador restrito. Seja $q_d(t) \in \Re^n$ e $\dot{q}_d(t) \in \Re^n$ a trajetória desejada e sua correspondente velocidade para as juntas. Assumindo que $q_d(t)$ e sua primeira e segunda derivadas $\dot{q}_d(t)$ e $\ddot{q}_d(t)$ são limitadas. Definimos uma força de contato também limitada como $f_d \in \Re^n$. Para que seja consistente com as restrições impostas, considere que $\phi(q_d) = 0$ e $f_d = J_c^T(q_d)\lambda_d$. Desde que $q^2 = \sigma(q^1)$, torna-se necessário somente encontrar uma lei de controle tal que $q^1 \to q_d^1$ quando $t \to \infty$. Então, definimos o erro de trajetória para a posição como $\overline{x}_1(t)$ e o erro de $link$ filtrado $\overline{x}_2(t)$, como em [7]:

$$\overline{x}(t) \doteq \begin{bmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} q^1(t) - q_d^1(t) \\ \dot{q}^1(t) - \dot{q}_d^1(t) + p(q^1(t) - q_d^1(t)) \end{bmatrix} \tag{10}$$

para uma constante $p > 0$.

Das equações (9) e (10), a equação dinâmica do erro pode ser obtida como

$$\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\overline{x}}_1 \\ \dot{\overline{x}}_2 \end{bmatrix} = A\overline{x} + Bu + B\omega, \tag{11}$$

sendo $A = \begin{bmatrix} -pI & I \\ 0 & -A_L^{-1}(q^1)C_L(q^1,\dot{q}^1) \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -(M(q^1)L(q^1))^{-1} \end{bmatrix}$
$u = F(x_e) - \tau$, $\omega = \Delta F(x_e) + \tau_d$, e $F(x_e) \doteq M(q^1)L(q^1)(\ddot{q}_d^1 - p\dot{\overline{x}}_1) + C_L(q^1,\dot{q}^1)(\dot{q}_d^1 - p\overline{x}_1) + G(q^1)$.

Com isso, os torques aplicados nas juntas para garantir a execução da tarefa desejada, são dados por

$$\tau = F(x_e) + \omega - u, \tag{12}$$

sendo que o termo $F(x_e)$ refere-se à dinâmica das variáveis controladas, ω refere-se à dinâmica desconhecida devido às incertezas paramétricas e distúrbios externos, e u à lei de controle estabelecida pelo controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ proposto neste artigo. O problema é abordado por duas estratégias diferentes. Na primeira estratégia, um sistema inteligente adaptativo é utilizado para estimar somente o termo ω, considerando que o modelo nominal do robô é conhecido. Na segunda estratégia, é considerado que o modelo do sistema ou o termo $F(x_e) + \omega$ é completamente desconhecido, então um sistema inteligente adaptativo é utilizado para estimar este. A lei de controle $\mathcal{H}_\infty$ é aplicada em ambas as estratégias com o objetivo de atenuar erros de estimativa e distúbios externos.

2.4.1 Estimadores Baseados em Sistemas Fuzzy

O controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear proposto neste trabalho é baseado na combinação de duas abordagens: uma baseada no modelo matemático nominal do manipulador e outra baseada em sistemas inteligentes para estimar as incertezas do manipulador. Vamos descrever a seguir dois procedimentos de projeto baseados em lógica fuzzy.

Um estimador baseado em lógica fuzzy é proposto para estimar o modelo de um sistema robótico $H(x_e)$ do tipo (11), sendo este parametrizado de acordo com (8). Considere o modelo fuzzy Takagi-Sugeno (T-S), [8], caracterizado por um conjunto de proposições lingüísticas do tipo:

$$\begin{array}{l} \textbf{SE } u_1 \text{ é } A_{11} \textbf{ e } u_2 \text{ é } A_{12} \ldots \textbf{e } u_r \text{ é } A_{1r}, \\ \textbf{ENTÃO } y_1 = \theta_{10} + \theta_{11}u_1 + \theta_{12}u_2 + \ldots + \theta_{1r}u_r \\ \vdots \\ \textbf{SE } u_1 \text{ é } A_{k1} \textbf{ e } u_2 \text{ é } A_{k2} \ldots \textbf{e } u_r \text{ é } A_{kr}, \\ \textbf{ENTÃO } y_k = \theta_{k0} + \theta_{k1}u_1 + \theta_{k2}u_2 + \ldots + \theta_{kr}u_r. \end{array} \tag{13}$$

onde A_{ij}, $j = 1,\ldots,r$ e $i = 1,\ldots,k$, são variáveis lingüísticas relacionadas ao conjunto fuzzy definido no espaço de entrada U_1, U_2, ..., U_r; u_1, u_2, ..., u_r são os valores das variáveis de entrada, k é o número de regras fuzzy e θ_i são os parâmetros ajustados pela lógica fuzzy. A saída de inferência do método T-S é *crisp* (portanto não necessita de um defuzzificador). Esta é definida como uma média ponderada das saídas y_i de cada subsistema linear

$$y = \frac{\sum_{i=1}^k \mu_i y_i}{\sum_{i=1}^k \mu_i} = \frac{\sum_{i=1}^k \mu_i(\theta_{i0} + \theta_{i1}u_1 + \theta_{i2}u_2 + \ldots + \theta_{ir}u_r)}{\sum_{i=1}^k \mu_i} \tag{14}$$

onde μ_i é o grau de pertinência da i-regra, definido como o mínimo entre os graus de pertinência associados às entradas dos conjuntos fuzzy ativados pela i-regra

$$\mu_i = A_{i1}(u_1) \wedge A_{i2}(u_2) \wedge \ldots \wedge A_{ir}(u_r). \tag{15}$$

Define-se

$$x_e \doteq \begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q^T - q_d^T & \dot{q}^T - \dot{q}_d^T \end{bmatrix}^T \tag{16}$$

como a entrada fuzzy, e

$$A(x_e) = \begin{bmatrix} A_1(\tilde{q}) & A_2(\dot{\tilde{q}}) \end{bmatrix} \tag{17}$$

como os conjuntos fuzzy das entradas fuzzificadas.

As entradas $\tilde{q}_1$ e $\dot{\tilde{q}}_1$ são respectivamente os erros de posição e velocidade das juntas. Tais entradas alimentam dois fuzzificadores e um operador de regressão linear. As saídas dos dois blocos de fuzzificação retornam graus de pertinência dos valores de entrada sobre grupos fuzzy. Esses graus de pertinência são submetidos a um operador lógico **E** que retorna o valor mínimo entre as duas entradas fuzzificadas. As saídas μ_k e y_k são relacionadas pela equação de ponderação (14). Então propõe-se um sistema fuzzy para estimação do modelo $H(x_e)$ baseado no método de T-S, definido como

$$H(x_e,\Theta) \doteq \begin{bmatrix} H_1(x_e^1,\Theta_1) \\ \vdots \\ H_n(x_e^n,\Theta_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1\Theta_1 \\ \vdots \\ \xi_n\Theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \xi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \vdots \\ \Theta_n \end{bmatrix} = \Xi\Theta, \tag{18}$$

com $\xi_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \mu_i^j} \begin{bmatrix} \mu_1^j & \ldots & \mu_k^j & \mu_1^j x_e^{j^T} & \ldots & \mu_k^j x_e^{j^T} \end{bmatrix}$ e $\Theta_i = \begin{bmatrix} \theta_{10}^i & \ldots & \theta_{1r}^i & \cdots & \theta_{k0}^i & \ldots & \theta_{kr}^i \end{bmatrix}^T$.

Caso 1 *Estimativa das Incertezas Paramétricas Baseada no Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno (TSIP).*
Sendo o estimador baseado em lógica fuzzy utilizado para estimar o termo desconhecido $\Delta F(x_e)$.

Caso 2 *Estimativa do Modelo Completo Baseada no Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno (TSMC)*
O Modelo Fuzzy de Takagi-Sugeno também pode ser utilizado para estimar o modelo completo do sistema (11), portanto, utiliza-se um sistema fuzzy adaptativo, $F(x_e, \Theta)$, para estimar o termo $F_0(x_e) + \Delta F(x_e)$.

De forma a garantir a estabilidade da lei de controle que será desenvolvida na próxima seção, considere as seguintes afirmações feitas em [2]:

1. Existe um valor para o parâmetro $\Theta^* \in \Omega_\theta$, conhecido como valor ótimo de aproximação, tal que os valores de $\Delta F(x_e, \Theta^*)$ e $F(x_e, \Theta^*)$ aproximam-se de $\Delta F(x_e)$ e $F(x_e)$ tanto quanto possível, onde Ω_θ é uma região de restrição definida como,$\Omega_\theta \doteq \{\Theta| \ \ \Theta^T\Theta \leq M_\theta, \ \ M_\theta > 0\}$, sendo M_θ uma constante positiva especificada pelo projetista.

2. Define-se $\delta F(x_e) = \Delta F(x_e, \Theta^\star) - \Delta F(x_e)$, e sem perda de generalidade assume-se que exista uma função $k(x_e) > 0$ tal que $|(\delta F(x_e))_i| \leq k(x_e)$, para todo $1 \leq i \leq n$.

De acordo com as considerações acima, a equação dinâmica modificada do erro (9) pode ser reescrita como, $A_L\dot{\overline{x}}_2 = -L^TC_L\overline{x}_2 + L^Tu + L^Td$, definindo $u \doteq -F_0(x_e) - \Delta F(x_e, \Theta^\star) + \delta F(x_e) + \tau$,
então, os torques aplicados podem ser calculados como

$$\tau = F_0(x_e) + \Xi\Theta + \bar{u}, \tag{19}$$

sendo $\bar{u}$ a lei de controle determinada pelo controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear.

2.4.2 Controle Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear

Baseado nos sistemas inteligentes apresentados, um controlador adaptativo é aplicado ao problema para garantir que os efeitos dos erros de estimativa e distúrbios externos sejam atenuados. A seguir é proposto no Teorema 2.1 um controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$, que é uma variação dos teoremas apresentados em [3], [2] e [4].

Teorema 2.1 *Considere o modelo reduzido (7) com incertezas na planta e distúrbios externos. Para as seguintes trajetórias de referência $q_d(t)$ e $\lambda_d(t)$, temos o seguinte controlador adaptativo baseado em sistemas inteligentes*

$$\dot{\Theta} = \begin{cases} -\rho\Xi^T L\bar{x}_2 \quad \textit{if } \|\Theta\| < M_\theta \textit{ or} \\ \qquad\qquad (\|\Theta\| = M_\theta \textit{ and } \bar{x}_2^T L^T \Xi\Theta \geq 0) \\ -\rho\Xi^T L\bar{x}_2 + \rho\frac{\bar{x}_2^T L^T \Xi\Theta}{\|\Theta\|^2}\Theta \quad \textit{if } \|\Theta\| = M_\theta \\ \qquad\qquad \textit{and } \bar{x}_2^T L^T \Xi\Theta < 0 \end{cases} \tag{20}$$

$$\tau = F_0(x_e) + \Xi\Theta - k_0E\bar{x}_2 + k(x_e)sgn(L\bar{x}_2) - J^T\lambda_c, \tag{21}$$

sendo $\lambda_c \doteq \lambda_d - k_\lambda\int_0^T(\lambda - \lambda_d)dt$ e $E \doteq \begin{bmatrix} I_{(n-m)\times(n-m)} \\ 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix}$, para alguma constante $k_\lambda > 0$, onde $\lambda_d(t)$ é o multiplicador lagrangiano desejado relacionado com a restrição de força desejada $f_d(t)$, onde $f_d(t) = J^T(q_d(t))\lambda_d(t)$. A restrição de força desejada $f_d(t)$ é então assumida como sendo limitada, [4].

Então, para condições iniciais limitadas e $\rho > 0$, existe uma escolha adequada da constante k_0 tal que o seguinte critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ é garantido, [4], portanto os seguintes itens são assegurados:

1. *$\Theta(t) \in \Omega_\theta$ e todas as variáveis $q(t), \dot{q}(t)$ e $\tau(t)$ são limitadas para todo $t \geq 0$.*

2. *O seguinte índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ é mantido $\int_0^T \|\bar{x}(t)\|_Q^2 \leq V(0) + \gamma^2\int_0^T \|d(t)\|^2, \quad \forall T \geq 0$, com $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$, onde Q é uma matriz de ponderação, V(0) é a função candidata a Lyapunov quando t=0 e γ é o nível de atenuação pré-determinado.*

3. *Se $\omega(t) \in L_2[0, \infty) \cap L_\infty[0, \infty)$, então pode-se concluir que $lim_{t\to\infty}(q^1(t) - q_d^1(t)) = 0$ e $lim_{t\to\infty}(\dot{q}^1(t) - \dot{q}_d^1(t)) = 0$.*

3. RESULTADOS

Para validar a proposta, resultados experimentais foram obtidos com o controlador desenvolvido na Seção 2 utilizando um manipulador planar de três elos, UARM (UnderActuated Robot Manipulator). Cada junta do UARM é composta por um motor DC, um freio e um encoder óptico. As velocidades das juntas são obtidas por diferenciação numérica e filtragem. Como as forças entre o efetuador do manipulador e o meio são partes do problema abordado, um sensor de força foi projetado e construído. O dispositivo desenvolvido utiliza sensores piezoelétricos, possibilitando medições dinâmicas para forças e momentos nos três eixos ortogonais.

A superfície de restrição ao efetuador robótico é um segmento de reta no plano X-Y, com a orientação do efetuador perpendicular ao segmento de reta. Portanto a orientação deverá ser mantida em um valor constante c dado pela inclinação β. Assim, a equação de $m = 2$ restrições é dada por $\phi(q) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} + \beta[l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123}] + b \\ q_1 + q_2 + q_3 - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sendo b o coeficiente linear da reta de restrição, $s_{ij} = sin(q_i + q_j)$, $c_{ij} = cos(q_i + q_j)$, q_i a posição angular da i-junta i, e l_i o comprimento do i-elo. Então, $\phi : \Re^3 \to \Re^2$, e a matriz Jacobiana, $J(q) = \partial\phi/\partial q$, é dada por $J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \end{bmatrix}$ com

$$\begin{aligned}
J_{11} &= l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} + \beta[l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}] \\
J_{12} &= l_2 c_{12} + l_3 c_{123} + \beta[l_2 s_{12} + l_3 s_{123}] \\
J_{13} &= l_3 c_{123} + \beta[l_3 s_{123}] \\
J_{21} &= J_{22} = J_{23} = 1.
\end{aligned}$$

Definindo $q^1 = [q_1]$ e $q^2 = [q_2 \;\; q_3]$, a matriz $L(q)$ da reta de restrição é dada por

$$L(q) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{[l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1+q_2) + \beta(l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1+q_2))]}{l_2[\cos(q_1+q_2) + \beta \sin(q_1+q_2)]} \\ \frac{[l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1+q_2) + \beta(l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1+q_2))]}{l_2[\cos(q_1+q_2) + \beta \sin(q_1+q_2)]} - 1 \end{bmatrix}.$$

As posições inicial e final do movimento são definidas $(x_0, y_0) = (0.46, 0.38)$ m e $(x(T), y(T)) = (0.53, 0.13)$ m, respectivamente. Neste caso, $\beta = -3.57$, $b = 2.02$, e $c = 15.64°$. As trajetórias para as juntas $q_d(t)$ são definidas como um polinômio de quinto grau, com duração de $T = 4$ s. É desejado que não existam forças e momentos atuando tanto na direção da reta de restrição quanto na direção do momento z, ou seja, $\lambda_d = [(F_x)_d \;\; (M_z)_d]^T = [0 \;\; 0]^T$. Durante o experimento, um distúrbio limitado foi introduzido com a seguinte forma

$$d = \begin{bmatrix} 0,01 e^{\frac{-(t-t_d)^2}{2\mu^2}} \mathrm{sen}(3,6\pi \mathrm{t}) \\ -0,01 e^{\frac{-(t-t_d)^2}{2\mu^2}} \mathrm{sen}(2,7\pi \mathrm{t}) \\ 0,01 e^{\frac{-(t-t_d)^2}{2\mu^2}} \mathrm{sen}(1,8\pi \mathrm{t}) \end{bmatrix}.$$

Se comparado com o torque nominal, o distúrbio d é aproximadamente 64% do valor de pico dele.

3.1 Implementação via sistemas fuzzy

Como o manipulador adotado nesses experimentos possui três juntas rotacionais, escolhe-se então três sistemas fuzzy distintos para estimar as incertezas do manipulador, os quais são baseados no modelo de Takagi-Sugeno. As entradas de cada sistema fuzzy são definidas como em (16).

Os conjuntos fuzzy são considerados com em (17), definidos no universo de discurso dos erros de posição, para $u_1 = \tilde{q}_1 \in U_1$, e no universo de discurso dos erros de velocidade, para $u_2 = \dot{\tilde{q}}_1 \in U_2$, como mostrado na Figura 2.

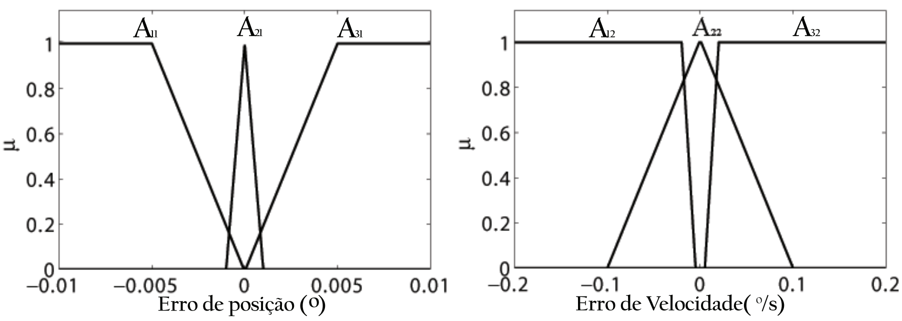


Figura 2: Conjuntos fuzzy $A_1(\tilde{q}_1)$ e $A_2(\dot{\tilde{q}}_1)$.

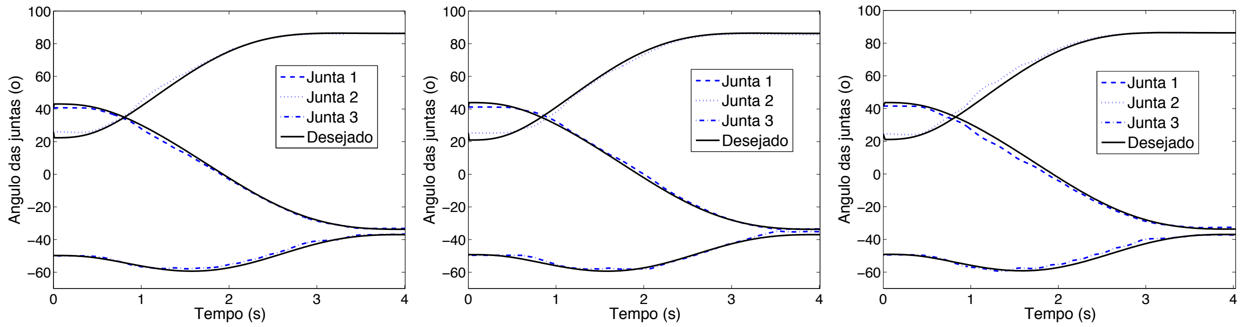
A base de regras fuzzy é dada como em (13), sendo $k = 9$ e $r = 2$. A saída das três juntas é expressa como em (18).

3.2 Discussão dos resultados

Na Figura 3 são exibidos os ângulos de acompanhamento das três juntas do manipulador robótico. Pode-se observar que para o controlador sem o sistema inteligente, NOM, a atuação do controle é mais lenta produzindo maior erro de acompanhamento dos sinais de referência.

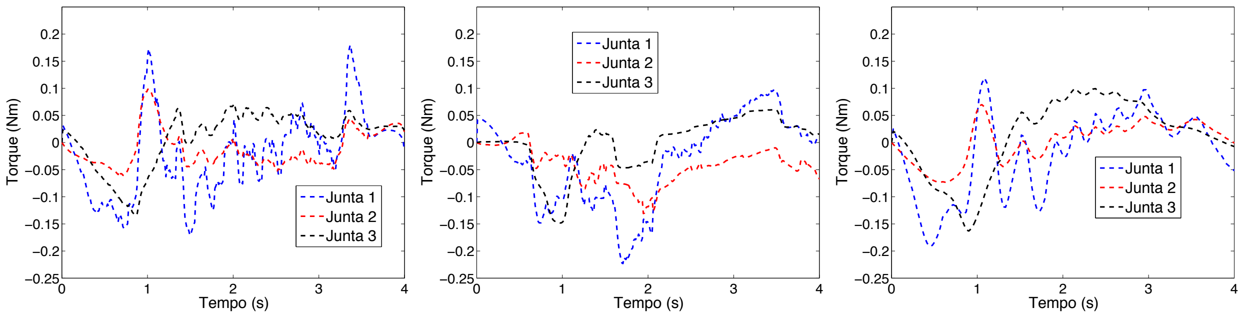
Na Figura 4 temos os torques aplicados nas juntas dos manipuladores robóticos. Nesta figura verifica-se que durante o intervalo correspondente ao distúrbio inserido, os controladores atuam fortemente no sistema, chegando a inverter os sentidos dos torques das juntas 1 e 2 e a intensificar o torque da junta 3.

Nos gráficos da Figura 5 são apresentadas as medições de força e momento no efetuador robótico. Como esperado, durante o período em que o distúrbio foi inserido no sistema houve maior intensidade de forças e momentos os quais diminuíram gradativamente, tendendo ao zero, até atingir o tempo final (4s).



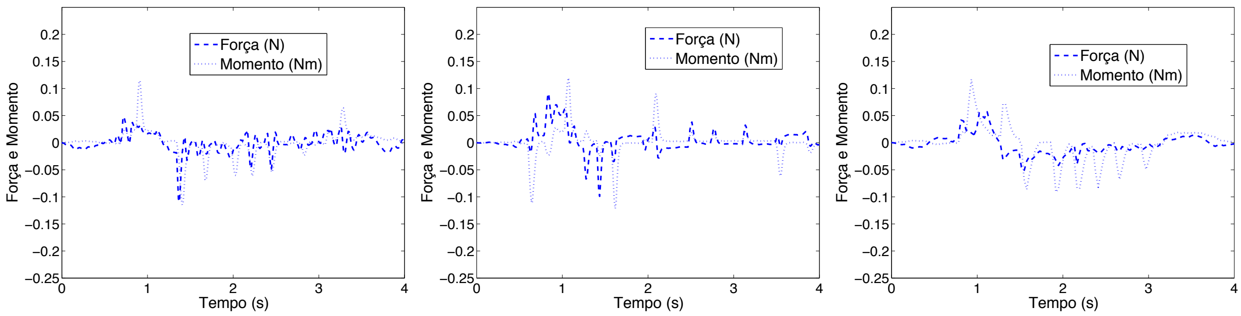
(a) TSIP (b) TSMC (c) NOM

Figura 3: Ângulos de acompanhamento das juntas.



(a) TSIP (b) TSMC (c) NOM

Figura 4: Torques nas juntas.



(a) TSIP (b) TSMC (c) NOM

Figura 5: Forças e momentos no efetuador.

Três indices de desempenho foram utilizados para comparar numericamente os controladores $\mathcal{H}_\infty$ não-lineares: a norma $\mathcal{L}_2$ do vetor de estados, a norma Euclideana da soma dos torques aplicados $\|\cdot\|_2$ e a soma das áreas das forças de contato:

$$\mathcal{L}_2[\tilde{x}] = \left(\frac{1}{(t_r - t_0)} \int_{t_0}^{t_r} \|\tilde{x}(t)\|_2^2 \, dt\right)^{1/2}, E[\tau] = \sum_{i=1}^{3} \left(\int_{t_0}^{t_r} |\tau_i(t)| \, dt\right), E[\lambda] = \sum_{i=1}^{3} \left(\int_{t_0}^{t_r} |\lambda_i(t)| \, dt\right),$$

sendo $\lambda_i(t)$ a i-componente das forças de contato. Como é desejado que as forças de contato tendam para zero, quanto menor for o valor de $E[\lambda]$, melhor será a atuação do controle com respeito as forças de contato.

Tabela 1: Indices de Desempenho

	$\mathcal{L}_2[x]$	$E[\tau]$	$E[\lambda]$
TSIP	0.0759	0.5865	0.1136
TSMC	0.0899	0.5182	0.1061
NOM	0.1031	0.6508	0.1506

Os resultados são mostrados na Tabela 1. Eles representam o valor médio de cinco experimentos realizados. Da Tabela 1 pode-se concluir que o controlador baseado apenas no modelo nominal apresenta maior erro de estado e maior erro no controle das forças de contato.

4. CONCLUSÃO

Como pode ser verificado na Seção 3, o controlador TS1 teve melhor acompanhamento de trajetória se comparado com TS2. Verifica-se também que apresentou um desempenho melhor por apresentar menor oscilação após a inserção de distúrbio. Este comportamento ocorre tanto para o acompanhamento da trajetória no espaço cartesiano como para o acompanhamento da trajetória dos ângulos das juntas. Além disso, todos os controladores responderam bem na presença de distúrbio. Pela análise dos índices de desempenho propostos verificou-se que o erro de estado nos controladores baseados em lógica fuzzy (TS1 e TS2) tendem a ser menores do que o modelo Nominal. Observou-se que a escolha dos valores de k_λ influenciam mais diretamente no ajuste das forças de esmagamento enquanto que os valores de ρ nos erros de acompanhamento das variáveis de estado. Comparando os gastos de energia do controlador TS1 com Nominal, verifica-se que tanto a energia consumida ($E[\tau]$) quanto as forças de esmagamento ($E[\lambda]$) diminuíram, mas o controlador TS2 ainda teve menor consumo de energia.

REFERÊNCIAS

[1] Y. C. Chang and B. S. Chen. “A Nonlinear Adaptive $\mathcal{H}_\infty$ Tracking Control Design in Robotic Systems via Neural Networks”. *IEEE Transactions on Control Systems Technology,*, vol. Volume 5, no. 1, pp. pp. 13–28, Jan 1997.

[2] Y. C. Chang. “Neural network-based $\mathcal{H}_\infty$ tracking control for robotic systems”. *IEEE Proceedings on Control Theory Applications,*, vol. Volume 147, no. 3, pp. pp. 303–311, May 2000.

[3] Y. C. Chang and B. S. Chen. “Adaptive Tracking Control Design of Constrained Robot Systems”. *International Journal of Adaptive Control Signal Processing*, vol. Volume. 12, no. 6, pp. pp. 495–526, 1998.

[4] Y. C. Chang and B. S. Chen. “Robust Tracking Designs for Both Holonomic and Nonholonomic Constrained Mechanical Systems: Adaptive Fuzzy Approach”. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. Volume 8, no. 8, pp. pp. 46–66, Feb 2000.

[5] S. Nogueira, T. F. Pazelli, A. Siqueira and M. Terra. “Adaptive fuzzy nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ tracking control design of a constrained robot system”. In *Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on*, pp. 362 –367, june 2008.

[6] N. H. McClamroch and D. Wang. “Feedback stabilization and tracking of constrained robots”. *IEEE Transactions on Automatic Control,*, vol. Volume 5, no. 33, pp. pp. 419–426, 1988.

[7] A. Petronilho, A. A. G. Siqueira and M. H. Terra. “Adaptive $\mathcal{H}_\infty$ control design via neural networks of a constrained robot system”. In *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, volume 44, pp. 5528–5533, Seville, Spain, Jun 2005.

[8] T. Takagi and M. Sugeno. “Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control”. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics,*, vol. Volume 15, pp. pp. 116–132, 1985.