

UMA NOVA METODOLOGIA DE JOGOS DINÂMICOS LQ

André L. S. de Alencar*, **J. T. Costa Filho***, **André L. C. de Araújo***

*Departamento de Engenharia de Teleinformática, Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici, Av. Mister Hull, S/N, CP 6005, CEP 60455-760, Fortaleza, Ceará, BRASIL
alencarandre85@gmail.com, jtcosta@ufc.br, andreluiz@ifce.edu.br

Resumo – A teoria dos jogos é um ramo da matemática dedicado ao estudo de situações que surgem quando múltiplos agentes de decisão buscam atingir seus objetivos individuais, possivelmente conflitantes entre si. Em sua formulação dinâmica linear quadrática (LQ), as soluções de equilíbrio de Nash dos jogadores podem ser obtidas em termos das equações algébricas de Riccati (ARE) acopladas, que, a depender do método numérico utilizado para seu cálculo, podem gerar resultados insatisfatórios sob o ponto de vista da estabilidade e precisão numérica. Neste sentido, esta dissertação propõe um novo algoritmo para uma solução alternativa das equações algébricas de Riccati acopladas associadas aos jogos dinâmicos LQ, com estrutura de informação em malha aberta, utilizando, para isso, conceitos da teoria da dualidade e otimização convexa. Em adição, obtém-se uma nova metodologia para a síntese de controladores ótimos sem o uso das ARE acopladas.

Palavras-chave – Equação Algébrica de Riccati Acoplada, Equilíbrio de Nash, Jogo Dinâmico Linear Quadrático.

Abstract – The game theory is a branch of mathematics concerned with the study of situations that arise when multiple decision agents seek to attain their own objectives, possibly conflicting each other. In a dynamic linear quadratic (LQ) formulation, the Nash equilibrium solutions of the players can be obtained in terms of the coupled algebraic Riccati equations, which, depending on the method used for calculation, can yield unsatisfactory results under the stability and the numerical precision points of view. In this sense, this work proposes a new algorithm for an alternative solution for the coupled algebraic Riccati equations associated with the LQ dynamic games, with open-loop structure information, through concepts of the duality theory and convex optimization. In addition, a new methodology for the synthesis of optimal controllers it's obtained without using the coupled ARE.

Keywords – Coupled Algebraic Riccati Equation, Nash Equilibrium, Dynamic Linear Quadratic Game.

1 INTRODUÇÃO

A teoria dos jogos é um ramo da matemática dedicado ao estudo de situações que surgem quando múltiplos agentes de decisão buscam atingir seus objetivos individuais, possivelmente conflitantes entre si. Nos últimos anos, tem crescido o interesse no estudo de problemas de engenharia através de ferramentas da teoria dos jogos. Em particular, a partir dos anos 90, os jogos dinâmicos lineares quadráticos (LQ) [1–5], juntamente com alguns métodos de programação convexa revelaram-se uma opção bastante atraente para a obtenção da solução de problemas de controle até então não resolvidos, como por exemplo, o problema de controle com múltiplos objetivos.

É bem conhecido que a solução de equilíbrio de Nash em malha aberta [1–3, 6] em jogos dinâmicos LQ é obtida em termos das equações algébricas de Riccati (ARE) acopladas. Haja vista a importância prática das ARE acopladas, diversos métodos numéricos que diferem em precisão, estabilidade numérica, custos de implementação computacional e eficiência, têm sido propostos para a solução das mesmas [3, 7–10]. Entretanto, a depender do método numérico utilizado para seu cálculo, podem ser gerados resultados insatisfatórios sob o ponto de vista da estabilidade e precisão numérica.

Em [11], é apresentada uma metodologia para a solução do problema do regulador linear quadrático, onde, através de princípios da dualidade, o problema é redefinido em sua forma dual, via método de Lagrange, e, posteriormente, transformado em um problema estático. Baseando-se nessa nova formulação, é, também, apresentado um novo algoritmo para a solução das equações algébricas de Riccati (ARE) e uma nova metodologia para a síntese de controladores. Este trabalho ([11]) serviu de motivação para que a transformação de um jogo dinâmico descrito por equações complexas em um jogo estático dual equivalente, descrito por equações mais simples [12], fosse considerada como um passo intermediário para a proposição de uma nova metodologia de jogos dinâmicos LQ de tempo discreto, baseada nas estratégias de equilíbrio de Nash em malha aberta.

Neste sentido, este artigo propõe um novo algoritmo para uma solução alternativa das equações algébricas de Riccati acopladas associadas aos jogos dinâmicos LQ de tempo discreto, com estrutura de informação em malha aberta, utilizando, para isso, conceitos da teoria da dualidade e otimização convexa. Em adição, obtém-se uma nova metodologia para a síntese de controladores ótimos sem o uso das ARE acopladas.

As demais seções deste trabalho estão organizadas da seguinte forma: na Seção 2 são apresentados os aspectos da teoria dos jogos necessários para fundamentação deste trabalho. O novo algoritmo para a solução da ARE acoplada é apresentado na Seção 3. A Seção 4 relata as simulações computacionais realizadas. O artigo é, então, concluído na Seção 5.

2. TEORIA DOS JOGOS

Nesta seção, os aspectos mais importantes da teoria dos jogos necessários para a fundamentação da metodologia proposta na Seção 3 são apresentados.

2.1 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA ESTRATÉGIA DE EQUILÍBRIO DE NASH

Em [1], a existência da solução de Nash é obtida pelo teorema do ponto fixo de Brouwer. Neste trabalho, propõe-se, dada a particularidade do jogo aqui considerado, através do Teorema 2.1 e da Proposição 2.1, as condições suficientes de existência e unicidade para se obter a solução de equilíbrio de Nash em jogos estáticos não cooperativos de N jogadores.

Proposição 2.1 *Seja a função custo $J_i : U_1 \times \dots \times U_N \rightarrow \mathbb{R}$ conjuntamente contínua em todos os seus argumentos e estritamente convexa em \mathbf{u}_i , para todo $\mathbf{u}_j \in U_j$, $j \in I$, $j \neq i$. Então, existe uma função $L : U \rightarrow U$ tal que $\mathbf{u} = L(\mathbf{u})$, onde, usando notação vetorial, $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N\} \in U \triangleq U_1 \times \dots \times U_N$ e $L = \{l_1, \dots, l_N\}$.*

Demonstração: Devido à convexidade estrita, existe um único mapeamento $l_i : U_{-i} \rightarrow U_i$, tal que $\mathbf{u}_i = l_i(\mathbf{u}_{-i})$ unicamente minimiza $J_i(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$ para qualquer \mathbf{u}_{-i} . Com efeito, l_i é a curva de reação de AD_i nesse jogo. Dessa forma, usando notação vetorial, pode-se representar os mapeamentos $l_i : U_{-i} \rightarrow U_i$ para todos os N jogadores na forma compacta $\mathbf{u} = L(\mathbf{u})$, onde $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N\} \in U \triangleq U_1 \times \dots \times U_N$ e $L = \{l_1, \dots, l_N\}$. □

Teorema 2.1 *Considere que para cada $i \in I$, seja U_i um subconjunto compacto e convexo de um espaço Euclidiano S_i dotado de uma métrica d_i , onde $d_i : U_i \times U_i \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha S_i completo em relação a d_i . Se o mapeamento $L : U \rightarrow U$, conforme Proposição 2.1, for uma contração em relação à métrica d de U , onde $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$, então, o jogo de soma não zero de N jogadores considerado, admite solução de equilíbrio de Nash e essa solução é única.*

Demonstração: Na seqüência será mostrado que as curvas de reação individuais l_i são contínuas em seus argumentos e, por isso, L é um mapeamento contínuo. Já que L promove o mapeamento de um subconjunto compacto U de um espaço de dimensão finita no próprio subconjunto, e que esse mapeamento é uma contração em relação à métrica d de U , então a seguinte equação é válida para quaisquer $\{\hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}\} \in U$:

$$d(L(\hat{\mathbf{u}}), L(\tilde{\mathbf{u}})) \leq \rho d(\hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}), \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (1)$$

Logo, pode-se afirmar, com base no teorema do ponto fixo de Banach, cuja demonstração pode ser encontrada em [13], que existe um único $\mathbf{u}^* \in U$ tal que $\mathbf{u}^* = L(\mathbf{u}^*)$, onde \mathbf{u}^* é o ponto fixo de L e, obviamente, os elementos de \mathbf{u}^* constituem a solução de equilíbrio de Nash, que, nesse caso, será única.

O complemento da demonstração do Teorema 2.1, que resume-se em mostrar a continuidade de l_i , pode ser encontrado em [1]. □

2.2 JOGOS DINÂMICOS LINEARES QUADRÁTICOS

Nesta seção, a solução de equilíbrio de Nash em malha aberta¹ para o jogo dinâmico LQ é apresentado como um jogo de referência frente à nova proposta a ser desenvolvida na Seção 3. Entretanto, primeiramente, o jogo dinâmico LQ de soma não zero com duração fixa (T estágios, onde $K = \{0, \dots, T-1\}$ é o conjunto desses estágios) é definido na seqüência.

Definição 2.1 *Um jogo dinâmico discreto determinístico de N agentes de decisão (jogadores), sendo $\{AD_i\}$, $\forall i \in I$, $i \in I = \{1, \dots, N\}$ o conjunto desses agentes, é do tipo linear quadrático se $X = \mathbb{R}^n$ (conjunto dos estados), $U_k^i = \mathbb{R}^{m_i}$ (conjunto dos controles de AD_i),*

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(k), \quad k \in K, \quad (2)$$

representa um sistema dinâmico linear e, neste caso, em particular, invariante no tempo, e

$$J_i(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N) = \sum_{k=0}^{T-1} \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k) \right\} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(T), \quad i \in I, \quad (3)$$

representa a função custo quadrática de AD_i , onde \mathbf{A} , \mathbf{B}_i , \mathbf{Q}_i e \mathbf{R}_{ij} são matrizes de dimensões $n \times n$, $n \times m_i$, $n \times n$ e $m_i \times m_j$ respectivamente, \mathbf{Q}_i é simétrica semi-definida positiva e \mathbf{R}_{ii} simétrica definida positiva para $i \in I$.

¹Nos jogos dinâmicos cuja a estrutura de informação encontra-se em malha aberta, como é aqui o caso, somente o estado inicial $\mathbf{x}(0)$ do jogo é conhecido.

O teorema que segue sintetiza, então, a solução de equilíbrio de Nash em malha aberta para um jogo dinâmico LQ de soma não zero.

Teorema 2.2 *Dado um jogo dinâmico discreto determinístico de N jogadores do tipo linear quadrático definido em (2.1), sejam $\mathbf{E}(k)$ e $\mathbf{M}_i(k)$ ($i \in I, k \in K$) matrizes com dimensões compatíveis, definidas por:*

$$\mathbf{E}(k) = \mathbf{I} + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \mathbf{M}_j(k+1), \quad (4)$$

$$\mathbf{M}_i(k) = \mathbf{A}^T \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{E}^{-1}(k) \mathbf{A} + \mathbf{Q}_i, \quad \mathbf{M}_i(T) = \mathbf{Q}_i. \quad (5)$$

Se as matrizes $\mathbf{E}(k)$ ($k \in K$), definidas de maneira recursiva, são inversíveis, o jogo admite uma única solução de equilíbrio de Nash em malha aberta, dada por:

$$\mathbf{u}_i^*(k) = -\mathbf{R}_{ii}^{-1}(k) \mathbf{B}_i^T(k) \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{E}^{-1}(k) \mathbf{A}(k) \mathbf{x}^*(k) \quad (i \in I, k \in K), \quad (6)$$

onde trajetória de estados ótima $\{\mathbf{x}^*(k+1); k \in K\}$ associada ao jogo é determinada por:

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \mathbf{E}^{-1}(k) \mathbf{A}(k) \mathbf{x}^*(k), \quad \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}(0), \quad (7)$$

e ganhos dinâmicos de realimentação de estados do tipo $\mathbf{u}_i(k) = -\mathbf{F}_i(k) \mathbf{x}(k)$ ($i \in I$) podem ser obtidos como:

$$\mathbf{F}_i(k) = \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{M}_i(k+1) \mathbf{E}^{-1}(k) \mathbf{A} = \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T (\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{M}_i(k) - \mathbf{Q}_i). \quad (8)$$

Demonstração: [13].

Considerando o caso no qual o número de estágios do jogo dinâmico tende ao infinito e que as equações a diferenças acopladas de Riccati (equação (5)) possuem comportamento assintótico², $\mathbf{M}_i(k)$ atingirá um valor de estado estacionário $\hat{\mathbf{M}}_i$, de tal forma que $\mathbf{M}_i(k) = \mathbf{M}_i(k+1) = \hat{\mathbf{M}}_i$, resultando nas **Equações Algébricas de Riccati (ARE) acopladas**, dadas por:

$$\hat{\mathbf{M}}_i = \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{M}}_i \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{Q}_i, \quad \mathbf{E} = \mathbf{I} + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \hat{\mathbf{M}}_j, \quad (9)$$

e as matrizes de ganho de realimentação de estado invariantes no tempo são dadas por:

$$\hat{\mathbf{F}}_i = \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{M}}_i \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T (\mathbf{A}^T)^{-1} (\hat{\mathbf{M}}_i - \mathbf{Q}_i). \quad (10)$$

3 NOVO ALGORITMO PARA A SOLUÇÃO DAS ARE ACOPLADAS

Nesta seção, a teoria da dualidade [14–16] é utilizada para que um jogo dinâmico LQ, descrito por equações complexas, possa, através da sua formulação dual, ser transformado em um jogo estático, descrito por equações mais simples. Baseado nesta nova formulação de jogo, é apresentado um novo algoritmo para a solução das equações algébricas acopladas de Riccati em jogos dinâmicos LQ de tempo discreto e, em adição, é proposto um novo método para a síntese de controladores LQ independente das ARE acopladas.

3.1 FORMULAÇÃO ESTÁTICA VIA TEORIA DA DUALIDADE

O jogo dinâmico LQ descrito na Definição 2.1 pode ser formulado como um problema de minimização quadrático com restrição linear, de tal forma que a função dual $L_i(\mathbf{p}_i)$ associada a esse problema é definida como:

$$L_i(\mathbf{p}_i) = \min_{\mathbf{u}_i} J_i^A(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N), \quad (11)$$

em que J_i^A é a função custo aumentada (ou Lagrangeano) e $\mathbf{p}_i = [\mathbf{p}_i^T(1), \dots, \mathbf{p}_i^T(T)]^T$ (vetor de co-estados) encontra-se na forma agregada. Com efeito, associando ao custo funcional, dado pela equação (11), as condições necessárias de otimalidade [13] como restrições lineares, têm-se o seguinte problema dual:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p}_i} \min_{\mathbf{u}_i} J_i^A &= \sum_{k=0}^{T-1} \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k)] + \mathbf{p}_i^T(k+1) [\mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j(k)] \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{p}_i^T(k) \mathbf{x}(k) \right\} - \mathbf{p}_i^T(T) \mathbf{x}(T) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(T), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}_i^{-1} (\mathbf{p}_i(k) - \mathbf{A}^T \mathbf{p}_i(k+1)), \quad (13)$$

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{p}_i(T), \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_i(k) = -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{p}_i(k+1). \quad (15)$$

²Em [2] são estabelecidas as condições necessárias para a existência das soluções das equações algébricas acopladas de Riccati.

O teorema que segue mostra como o problema dinâmico descrito pelas equações (12) à (15) pode ser transformado em um problema de otimização estática.

Teorema 3.1 Dada a concavidade estrita da função dual $L_i(\mathbf{p}_i)$ e as restrições dadas por (13), (14) e (15), o problema dual dinâmico pode ser resolvido através da seguinte forma quadrática estática:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\beta}_i} \quad & L_i(\boldsymbol{\beta}_i) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{H}_{ii}^i \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i, \\ \text{s.a.} \quad & \boldsymbol{\beta}_i \in \mathbb{R}^{nT}, \end{aligned} \quad (16)$$

onde

$$\mathbf{H}_{ii}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}^i & \mathbf{V}_{12}^i & & & \\ \mathbf{V}_{21}^i & \mathbf{V}_{22}^i & \mathbf{V}_{23}^i & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{V}_{T-1,T}^i & \\ & & & \mathbf{V}_{T,T-1}^i & \mathbf{V}_{T,T}^i \end{bmatrix}, \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}(0) - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \mathbf{p}_j(1) \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \mathbf{p}_j(2) \\ \vdots \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \mathbf{p}_j(T) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}(0)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \sum_{k=0}^{T-1} \mathbf{u}_j^T(k) \mathbf{R}_{ij} \mathbf{u}_j(k), \quad \boldsymbol{\beta}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i(1) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i(T) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nT}.$$

Para $k = \{1, \dots, T\}$: $\mathbf{V}_{kk}^i = -\mathbf{V}_3 - \mathbf{Q}_i^{-1}$, $\mathbf{V}_{kk+1}^i = \mathbf{V}_2^T$, $\mathbf{V}_{kk-1}^i = \mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_{11}^i = -\mathbf{V}_1 - \mathbf{Q}_i^{-1}$, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{B}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{A} \mathbf{Q}_i^{-1}$ e $\mathbf{V}_3 = \mathbf{A} \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{B}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T$.

Demonstração: [13].

Observação 3.1 Pode-se garantir que a matriz \mathbf{H}_{ii}^i seja definida negativa através de um Lema proposto em [11].

3.2 Solução de Equilíbrio de Nash

A obtenção da solução de equilíbrio de Nash para o jogo quadrático estático definido em (16) envolve a determinação das curvas de reação de cada agente. Como o problema dual é um problema de maximização, ou seja, $L_i(\boldsymbol{\beta}_i)$ é uma função estritamente côncava, as curvas de reação podem ser definidas como o resultado da maximização das respectivas funções objetivo ($L_i(\boldsymbol{\beta}_i)$) em relação às variáveis de decisão, como é mostrado abaixo:

$$\mathbf{W}_i(\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_N) = \frac{\partial L_i(\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_N)}{\partial \boldsymbol{\beta}_i} = \mathbf{H}_{ii}^i \boldsymbol{\beta}_i - \underbrace{\sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{H}_{ij}^i \boldsymbol{\beta}_j}_{\mathbf{b}_i} + \mathbf{r}_i, \quad (17)$$

onde

$$\mathbf{H}_{ij}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T \end{bmatrix}, \mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Dessa forma, uma solução de equilíbrio de Nash deve satisfazer o sistema de equações $\mathbf{W}_i(\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_N) = 0$, $i \in I$ que pode ser reescrito na seguinte forma compacta

$$\mathbf{H} \tilde{\boldsymbol{\beta}} + \tilde{\mathbf{r}} = 0, \quad (19)$$

onde

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^1 & -\mathbf{H}_{12}^1 & \cdots & -\mathbf{H}_{1N}^1 \\ -\mathbf{H}_{21}^2 & \mathbf{H}_{22}^2 & \cdots & -\mathbf{H}_{2N}^2 \\ & & \vdots & \\ -\mathbf{H}_{N1}^N & -\mathbf{H}_{N2}^N & \cdots & \mathbf{H}_{NN}^N \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$\tilde{\boldsymbol{\beta}}^T = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_N)$ e $\tilde{\mathbf{r}}^T = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, sendo então possível estabelecer a unicidade e a existência da solução de equilíbrio de Nash, através da seguinte proposição:

Proposição 3.1 *O jogo estático e quadrático de Nash de N jogadores definido pelas funções objetivo (16), onde $\mathbf{H}_{ii}^i < 0$, admite uma solução única $\tilde{\beta}^*$ se, e somente se, a matriz definida por (20) for inversível.*

Demonstração: De (19), têm-se que $\tilde{\beta}^* = -\mathbf{H}^{-1}\tilde{\mathbf{r}}$. \square

Observação 3.2 *Neste trabalho, através do Teorema 2.1, têm-se estabelecido as condições de suficiência que garantem a existência e unicidade da solução de equilíbrio de Nash, baseando-se nas hipóteses de convexidade estrita e na contração das curvas de reação, particularmente para o caso especial do sistema de equações $\mathbf{W}_i(\beta_1, \dots, \beta_N) = 0$, $i \in I$.*

3.3 NOVO ALGORITMO

Em conformidade com a formulação estática do jogo dinâmico LQ, são derivados dois importantes resultados: Proposições 3.2 e 3.3, que permitem a obtenção de um novo algoritmo para a solução das ARE acopladas.

Proposição 3.2 *Um jogo linear quadrático de 2 jogadores e T estágios de tempo, tem o custo funcional ótimo de AD_i dado pela seguinte equação:*

$$J_i^*(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(0)\{\mathbf{Q}_i - \mathbf{A}^T(\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11})\mathbf{A}\}\mathbf{x}(0) - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(0)\mathbf{A}^T \left\{ \sum_{k=1}^T [(\mathbf{h}_{i1}^{k1} + \mathbf{h}_{i2}^{k1})^T \mathbf{T}_{jj}(\mathbf{h}_{j1}^{k1} + \mathbf{h}_{j2}^{k1}) - (\mathbf{h}_{21}^{k1} + \mathbf{h}_{22}^{k1})^T \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{h}_{21}^{k1} + \mathbf{h}_{22}^{k1})] \right\} \mathbf{A}\mathbf{x}(0), \quad \forall i \in I, \quad j = I - \{i\}, \quad I = \{1, 2\}, \quad (21)$$

onde $\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{B}_j \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{B}_j^T$, a inversa da matriz \mathbf{H} , com dimensões $nNT \times nNT$, é definida para $N = 2$, como:

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_{11} & \bar{\mathbf{H}}_{12} \\ \bar{\mathbf{H}}_{21} & \bar{\mathbf{H}}_{22} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

onde cada bloco $\bar{\mathbf{H}}_{ij}, \forall i, j \in I$, com dimensões $nT \times nT$, é definido, para $T = 2$, como:

$$\bar{\mathbf{H}}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{ij}^{11} & \mathbf{h}_{ij}^{12} \\ \mathbf{h}_{ij}^{21} & \mathbf{h}_{ij}^{22} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

de tal forma que cada sub-bloco $\mathbf{h}_{ij}^{lc}, \forall l, c \in \{1, \dots, T\}$ e $\forall i, j \in I$, possui dimensões $n \times n$.

Demonstração: [13]. \square

Corolário 3.1 *Considerando o caso particular de um jogo de 1 jogador, ou seja, um problema de controle ótimo, a equação (21) torna-se:*

$$J_1^*(\mathbf{u}_1) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(0)\{\mathbf{Q}_1 - \mathbf{A}^T(\mathbf{h}_{11}^{11})\mathbf{A}\}\mathbf{x}(0). \quad (24)$$

Demonstração: Nesse caso, têm-se que $\mathbf{T}_{22} = \mathbf{T}_{12} = 0$, já que $\mathbf{B}_2 = 0$. Além disso, $\mathbf{h}_{12}^{11} = 0$, pois $\bar{\mathbf{H}}_{12} = 0$, já que não existe um segundo jogador. Dessa forma, substituindo estas igualdades na equação (21), obtêm-se a equação (24). Tal resultado fora anteriormente obtido em [11] para o projeto de controladores ótimos.

Proposição 3.3 *Um jogo linear quadrático de $N = 2$ jogadores e T estágios de tempo, tem a matriz de Riccati de AD_i , no instante $k = 0$, dada pela seguinte equação:*

$$\mathbf{M}_i(0) = \mathbf{Q}_i - \mathbf{A}^T(\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11})\mathbf{A} \quad (25)$$

Demonstração: [13].

Para o caso de um jogo linear quadrático em estado estacionário ($T \rightarrow \infty$) de 2 jogadores, a equação algébrica acoplada de Riccati de AD_i é novamente dada por:

$$\hat{\mathbf{M}}_i = \mathbf{Q}_i - \mathbf{A}^T(\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11})\mathbf{A}. \quad (26)$$

Observação 3.3 *Na prática, não é, de fato, necessário fazer $T \rightarrow \infty$ para se obter a $\hat{\mathbf{M}}_i$. Devido ao comportamento assintótico característico das equações a diferenças acopladas de Riccati, existe um $t \in \mathbb{N}$ finito, tal que $\mathbf{M}_i(k) = \mathbf{M}_i(k+1) = \hat{\mathbf{M}}_i$ para $k \geq t$.*

3.4 SÍNTESE DE CONTROLADORES LQ

Nesta seção, é sugerido um método de se obter uma lei de controle com realimentação de estado para um jogo de 2 jogadores ($I = \{1, 2\}$) com estrutura de informação em malha aberta, sem a utilização das correspondentes ARE acopladas, onde a realimentação de estado é do tipo:

$$\mathbf{u}_i(k) = -\hat{\mathbf{F}}_i \mathbf{x}(k), \quad i \in I \quad (27)$$

A proposição que segue ilustra o método de se calcular os ganhos de realimentação.

Proposição 3.4 *Considere um jogo linear quadrático de 2 jogadores que utiliza realimentação de estado do tipo dado pela equação (27). Os ganhos de realimentação de estado podem ser dados por:*

$$\hat{\mathbf{F}}_i = -\mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{B}_i^T (\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11}) \mathbf{A}, \quad i \in I \quad (28)$$

Demonstração: Com efeito, a equação (28) é obtida substituindo a equação (26) na equação (10) para $i \in I$. \square

Observação 3.4 *Como se pode observar na equação (28), o algoritmo proposto no novo método necessita da inversa da matriz \mathbf{H} . À primeira vista, isto pode representar um obstáculo para aplicações em tempo real com horizonte infinito, entretanto, esta inversa pode ser, previamente, computada off-line utilizando diversos métodos numéricos diretos tais como: fatorização de House-Holder, rotação de Givens, fatorização de Cholesky e decomposição em valores singulares [17].*

4. RESULTADOS

Esta seção apresenta um exemplo de projeto de controlador LQ, para que, através de simulações computacionais, a nova metodologia desenvolvida na Seção 3 seja confrontada com o jogo de referência descrito na Seção 2, evidenciando as características de cada uma das abordagens utilizadas e suas particularidades frente às especificações de projeto.

A matriz de Riccati em regime permanente e o ganho de realimentação, associados à AD_i , obtidos pelo método tradicional (jogo de referência) serão designados por $\bar{\mathbf{M}}_i$ e $\bar{\mathbf{F}}_i$. Enquanto a matriz de Riccati em regime permanente e o ganho de realimentação associados à AD_i e obtidos pelo novo método serão designados por $\hat{\mathbf{M}}_i$ e $\hat{\mathbf{F}}_i$.

Considera-se o sistema dinâmico estudado em [12], dado por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,35 & 1,2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_1(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_2(k), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

cuja função objetivo a ser minimizada é

$$J_1 = J_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^T(k) \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}_1^2(k) + \mathbf{u}_2^2(k). \quad (30)$$

Para esse jogo em particular, $J_1 = J_2 = J$, e o desempenho otimizado pode ser dado por [13]:

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^*(0)^T \mathbf{M}_i(0) \mathbf{x}^*(0), \quad i = 1 \text{ ou } 2, \quad (31)$$

ou, utilizando a nova metodologia, por:

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \{ \mathbf{Q}_i - \mathbf{A}^T (\mathbf{h}_{i1}^{11} + \mathbf{h}_{i2}^{11}) \mathbf{A} \} \mathbf{x}(0), \quad i = 1 \text{ ou } 2, \quad (32)$$

O custo ótimo obtido utilizando as duas abordagens consideradas (equações 31 e 32) coincidiu em $J^* = 0,0295$.

Utilizando a equação a diferenças de Riccati (5), é possível evidenciar a característica assintótica que a matriz $\mathbf{M}_i(k)$ adquire à medida que o número de estágios T do jogo é aumentado. Como o valor de $\mathbf{M}_i(k)$ é obtido recursivamente de trás para frente (*backward*) em termos dos instantes de tempo ($\mathbf{M}_i(T) = \mathbf{Q}_i$), o valor de regime ($\hat{\mathbf{M}}_i$) será atingido à medida que $k \rightarrow 0$, desde que T seja suficientemente grande para o jogo em questão.

Considerando que a matriz $\mathbf{M}_i(k)$ seja dada por:

$$\mathbf{M}_i(k) = \begin{bmatrix} m_{11}(k) & m_{12}(k) \\ m_{21}(k) & m_{22}(k) \end{bmatrix}, \quad m_{pq}(k) \in \mathbb{R}, \quad \forall p, q \in \{1, 2\}, \quad \forall k \in K, \quad (33)$$

é possível observar na Figura 1 o comportamento dos elementos da matriz $\mathbf{M}_i(k)$ ao longo do tempo e sua convergência para os elementos da matriz $\hat{\mathbf{M}}_i$.

Na Tabela 1, pode-se comparar o novo método para o cálculo da matriz de Riccati em regime permanente ($\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}}_1 = \hat{\mathbf{M}}_2$) com o método tradicional via ARE ($\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{M}}_1 = \bar{\mathbf{M}}_2$).

Na Tabela 2, pode visualizar o ganho obtido para AD_1 utilizando o novo método para síntese do controlador variando-se o número de estágios do jogo, e o quão próximos estes ganhos estão dos obtidos pelo método tradicional.

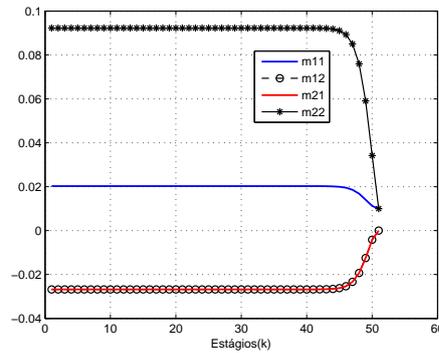


Figura 1: Convergência dos coeficientes da matriz $M_i(k)$ com $T = 50$.

Estágios (T)	\bar{M}	\hat{M}	$\ \bar{M} - \hat{M}\ $
3	$\begin{bmatrix} 0,0168 & -0,0193 \\ -0,0193 & 0,0759 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0168 & -0,0193 \\ -0,0193 & 0,0759 \end{bmatrix}$	$6,2542 \times 10^{-17}$
10	$\begin{bmatrix} 0,0203 & -0,0268 \\ -0,0268 & 0,0922 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0203 & -0,0268 \\ -0,0268 & 0,0922 \end{bmatrix}$	$8,8967 \times 10^{-17}$
100	$\begin{bmatrix} 0,0203 & -0,0268 \\ -0,0268 & 0,0923 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0203 & -0,0268 \\ -0,0268 & 0,0923 \end{bmatrix}$	$2,6930 \times 10^{-16}$

Tabela 1: Comparação entre as matrizes acopladas de Riccati obtidas pelo método tradicional e pelo novo método.

Estágios (T)	\bar{F}_1	\hat{F}_1	$\ \bar{F}_1 - \hat{F}_1\ $
3	$[0,0041 \quad -2,3355 \times 10^{-4}]$	$[0,0041 \quad -0,0002]$	$1,6457 \times 10^{-17}$
10	$[0,0084 \quad -0,0096]$	$[0,0084 \quad -0,0096]$	$4,1921 \times 10^{-17}$
100	$[0,0084 \quad -0,0096]$	$[0,0084 \quad -0,0096]$	$1,0889 \times 10^{-16}$

Tabela 2: Comparação entre ganhos 1 obtidos pelo método tradicional e pelo novo método.

Observando as Tabelas 1 e 2, percebe-se a equivalência entre o novo método e o método tradicional, tanto para o cálculo da matriz acoplada de Riccati, quanto para o cálculo dos ganhos de realimentação de estado. Além disso, como anteriormente dito na Observação 3.3, não há mudanças significativas nos resultados com o aumento dos estágios do jogo, desde que com o número atual de estágios tenha-se atingido o regime permanente. Como com $T = 10$ o sistema dinâmico já atingiu o regime permanente, conforme Figura 1, não há melhoria significativa ao se utilizar $T = 100$.

Nas Figuras 2(a) e 2(b), pode-se observar a equivalência, tanto para as trajetórias de controle quanto de estado, entre os resultados obtidos pelo novo método e pelo método tradicional. Nos dois métodos utiliza-se $T = 10$ para o cálculo dos ganhos de realimentação.

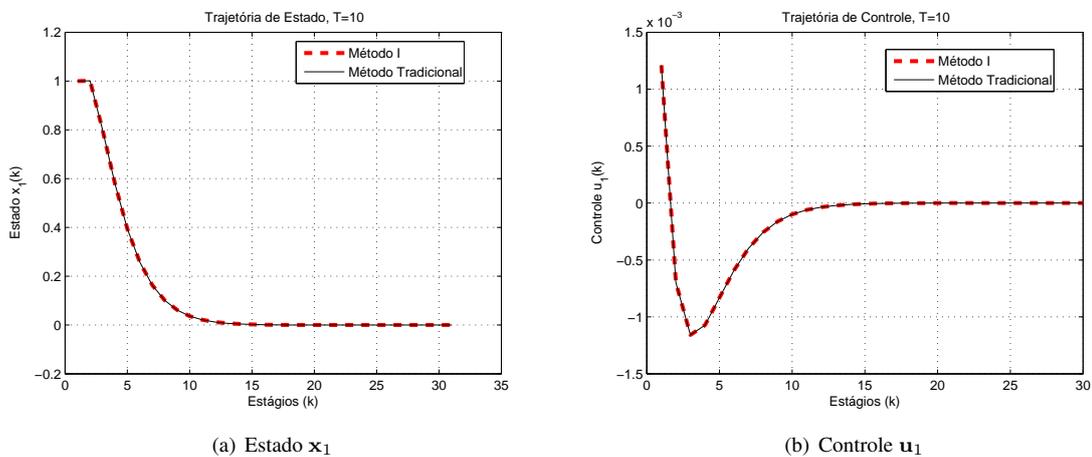


Figura 2: Trajetórias de estado e controle obtidas através do método tradicional e novo método.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou, sob a forma de uma proposição matemática, uma nova metodologia para a solução das equações algébricas de Riccati acopladas associadas aos jogos dinâmicos lineares quadráticos com estrutura de informação em malha aberta. Na metodologia de jogos dinâmicos LQ proposta, empregou-se a programação convexa para a formulação do problema original dinâmico em um problema estático dual descrito por equações mais simples, sendo esse passo primordial para o desenvolvimento do novo algoritmo. A nova metodologia de síntese de controladores para problemas de jogos dinâmicos LQ está matematicamente consolidada através de uma proposição originalmente formulada.

Com a análise dos resultados obtidos via simulação computacional, foi possível comprovar a equivalência entre o novo algoritmo e o algoritmo tradicional para a solução das ARE acopladas, e a equivalência entre o novo método e o método tradicional via ARE para a síntese de controladores LQ.

REFERÊNCIAS

- [1] T. Basar and G. J. Olsder. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. SIAM, 1999.
- [2] G. Freiling, G. Jank and H. Abou-Kandil. “Discrete Time Riccati Equations in Open Loop Nash and Stackelberg Games”. In *Proceedings of ECC 97, Brüssel*, 1997.
- [3] X. Nian, Z. Duan and W. Tang. “Analytical solution for a class of linear quadratic open-loop Nash game with multiple players”. *Journal of Control Theory and Applications*, vol. 3, pp. 239–244, 2006.
- [4] M. Pachter and K. D. Pham. “Discrete-Time Linear-Quadratic Dynamic Games”. *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 146, pp. 151–179, 2010.
- [5] J. Engwerda. “A Note on Cooperative Linear Quadratic Control”. Discussion paper, Tilburg University, Center for Economic Research, 2007.
- [6] J. Engwerda. “The Open-Loop Linear Quadratic Differential Game Revisited”. Discussion Paper 2005-34, Tilburg University, Center for Economic Research, 2005.
- [7] J. Engwerda. “Computational aspects of the open-loop Nash equilibrium in linear quadratic games”. Open Access publications from Tilburg University urn:nbn:nl:ui:12-75998, Tilburg University, 1998.
- [8] J. Engwerda. “A Numerical Algorithm to find Soft-Constrained Nash Equilibria in Scalar LQ-Games”. Technical report, 2005.
- [9] M. A. Simaan and J. B. Cruz. “On the solution of the open-loop Nash Riccati equations in linear quadratic differential games”. *International Journal of Control*, vol. 18, no. 1, pp. 57–63, 1973.
- [10] J. Engwerda. “Solving the scalar feedback Nash algebraic Riccati equations: an eigenvector approach”. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 48, no. 5, pp. 847 – 852, may 2003.
- [11] N. A. Vilmar and J. T. Costa Filho. “Uma Contribuição ao Controle Robusto de Sistemas Dinâmicos Multivariáveis”, 2007.
- [12] J. T. Costa Filho and C. P. Bottura. “Proposta para computação assíncrona paralela e distribuída de estruturas especiais de jogos dinâmicos”. Ph.D. thesis, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica, 1992.
- [13] A. L. S. de Alencar. “Uma Nova Metodologia de Jogos Dinâmicos Lineares Quadráticos”. Master’s thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Julho 2011.
- [14] M. S. Bazaraa, D. Sherali, Hanif and M. Shetty, C. *Nonlinear programming, Theory and Algorithms*. Wiley, New York :, 1993.
- [15] D. G. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, first edition, 1997.
- [16] B. Stephen and L. Vandenbergue. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2008.
- [17] G. H. Golub and C. F. V. Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, third edition, 1996.