

CONTROLE NEBULOSO MULTI-OBJETIVO: ANÁLISE E PROJETO DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO ÓTIMO COM ALOCAÇÃO DE PÓLOS

Rafael J. M. Santos ; Ginalber L. O. Serra

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão

Departamento de Eletro-Eletrônica

Laboratório de Inteligência Computacional Aplicada à Tecnologia

Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, CEP: 65030-005, São Luís, Maranhão, Brasil

rafael82ms@yahoo.com.br, ginalber@ifma.edu.br

Resumo – Este artigo apresenta uma metodologia para projeto de controle nebuloso *Takagi-Sugeno* (TS) para sistemas não-lineares. O Regulador Linear Quadrático (*LQR*) e o método de alocação de pólos são combinados em um contexto nebuloso de maneira a garantir um controlador ótimo com desempenho temporal satisfatório baseado em pólos adequadamente alocados. A análise e a definição da região factível, para o projeto do controlador nebuloso multi-objetivo, considerando a influência dos pólos desejados sobre as matrizes de ponderação **Q** e **R**, da função de custo quadrática, foram estabelecidas. Resultados de simulação, com aplicação sobre um manipulador robótico, mostram a eficiência da metodologia proposta.

Palavras-chave – Controle nebuloso, regulador linear quadrático, alocação de pólos, sistemas não-lineares, região factível.

Abstract – This paper proposes a *Takagi-Sugeno* (TS) fuzzy control design methodology to nonlinear systems. The Linear Quadratic Regulator (*LQR*) and pole placement techniques are combined in a TS fuzzy structure in order to guarantee an optimal controller with satisfactory temporal performance based on poles properly allocated. The analysis and definition of the feasible region, for the multi-objective fuzzy controller design, considering the influence of the desired poles on the weighting matrices **Q** and **R**, of the quadratic cost function, were established. Simulations results, with application on a robotic manipulator, show the efficiency of the proposed methodology.

Keywords – Fuzzy control, linear quadratic regulator, pole placement, nonlinear systems, feasible region.

1. INTRODUÇÃO

Os problemas de controle atuais apresentam uma tendência natural de aumentar sua complexidade em virtude dos critérios de desempenho multi-objetivos, e a sua satisfação com alta precisão e exatidão. As aplicações industriais, em geral, apresentam plantas de entradas e saídas múltiplas (*MIMO*¹). Nesse contexto, a teoria de controle clássica, caracterizada pela representação por entrada-saída, apresenta limitações, uma vez que não permite o acesso completo a todas as variáveis deste tipo de planta industrial. Isto tem motivado a busca por novas estratégias de controle, explorando a representação por espaço de estados, o que definiu o surgimento da teoria de controle moderna. A partir de então, várias metodologias foram propostas, desde aquelas mais simples para tratar de plantas industriais lineares (neste caso, as não-linearidades e incertezas são consideradas desprezíveis) até aquelas mais sofisticadas onde o projeto do controlador leva em conta as características não-lineares, incertas e/ou variantes no tempo da planta industrial [1–4]. Atualmente, a busca por abordagens baseadas na utilização de *inteligência computacional*, levando-se em conta o impacto de técnicas como sistemas *nebulosos*, entre outras, tem permitido as suas aplicações na modelagem e controle de plantas complexas, alcançando resultados promissores que corroboram o seu uso cada vez mais crescente [5–7]. A teoria de sistemas nebulosos, em particular, tem recebido grande atenção por parte dos pesquisadores na área de controle, por ser capaz de tratar eficientemente com incertezas e não-linearidades através da sua estrutura funcional. Este interesse tem crescido nos últimos anos devido a possibilidade de se incorporar na estrutura do controlador nebuloso o conhecimento do especialista bem como o formalismo matemático oriundo da teoria de controle moderna, resultando em controladores com alto grau de transparência, interpretação, e ao mesmo tempo garantindo robustez e estabilidade nas malhas de controle. Na literatura, são numerosas as aplicações bem sucedidas de sistemas de controle nebuloso que apresentam as características supracitadas. Em [8] é proposta uma metodologia geral que usa lógica nebulosa de forma sistemática e formal para sintetizar sistemas de controle não-lineares, que são estáveis pelo projeto. Embora baseadas na teoria de Lyapunov, ela evita a busca pelas funções de Lyapunov, permitindo que o processo de síntese seja sistemático bem como formal e, especialmente, independente de heurística. Em [9], um novo método de projeto de controlador nebuloso robusto é proposto para estabilizar uma classe de sistemas caóticos com parâmetros incertos baseado em seus modelos nebulosos *Takagi-Sugeno* equivalentes. Com esse método, um controlador nebuloso com realimentação de estado é projetado para estabilizar o equilíbrio do sistema caótico incerto, robustamente, baseado na teoria de Linearização exata e Técnica de Compensação Paralela e Distribuída. O controlador projetado, com simples estrutura e rápida

¹Do inglês *multiple-input, multiple-output*.

resposta, pode estabilizar vários tipos de sistemas hipercaóticos e caóticos. Em [10], após um estudo e síntese de controladores baseados em redes neurais e lógica nebulosa para controle ótimo de sistemas não-lineares incertos, são propostos três tipos de arquiteturas de controladores hierárquicos e o estudo demonstra que o esquema de controle baseado em lógica nebulosa e redes neurais proposto é muito útil em aplicações para sistemas não-lineares. Este artigo apresenta uma estratégia de controle nebuloso *Takagi-Sugeno* (TS) ótimo com alocação de pólos no espaço de estados para sistemas não-lineares. A alocação de pólos é uma técnica na qual todos os pólos de malha-fechada são alocados nas posições desejadas de modo a garantir que a resposta do sistema apresente aspectos previamente estabelecidos, como especificações da resposta temporal, quais sejam velocidade, coeficiente de amortecimento, máximo de sobre-sinal, como também especificações de regime permanente. Como técnica de controle ótimo será utilizado o regulador linear quadrático (*LQR*), que permite calcular de maneira sistemática a matriz de ganho de realimentação de estado para o sistema regulador. Essas duas técnicas serão aqui combinadas em um contexto nebuloso de maneira a garantir um controlador ótimo com desempenho temporal satisfatório baseado em pólos adequadamente alocados. A estrutura do artigo é como segue: Na Seção 2 são apresentadas a estrutura fundamental do sistema de inferência nebuloso *Takagi-Sugeno* no espaço de estados que será utilizada para representar o comportamento dinâmico de uma planta não-linear, bem como o formalismo matemático para combinação das técnicas *LQR* e alocação de pólos no contexto nebuloso. Na Seção 3, são apresentados os principais resultados computacionais referentes à região multi-objetiva factível definida pelas técnicas *LQR* e alocação de pólos, e a aplicação da metodologia proposta como regulador nebuloso multi-objetivo de um manipulador robótico. A Seção 4 apresenta as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

2. CONTROLE NEBULOSO ÓTIMO COM ALOCAÇÃO DE PÓLOS

O método do regulador linear quadrático (*LQR*) permite o cálculo da matriz de ganho \mathbf{K}_i de realimentação de estado de maneira sistemática. Nesta seção será proposta uma associação entre a técnica de alocação de pólos e o *LQR*, no contexto nebuloso, de modo que seja possível alocar os pólos de malha-fechada nas posições desejadas e ao mesmo tempo garantir um controle ótimo.

2.1 Sistema de inferência nebuloso *Takagi-Sugeno* no espaço de estados

Um sistema de inferência nebuloso *Takagi-Sugeno* (TS) usa no consequente de suas regras SE-ENTÃO uma expressão funcional da variáveis linguísticas do antecedente. A $i^{\text{ésima}}$ regra TS, onde l é o número de regras, é dada por

$$R^i : \text{SE } \tilde{x}_1 \text{ é } F_{j|\tilde{x}_1}^i \text{ E ... E } \tilde{x}_n \text{ é } F_{j|\tilde{x}_n}^i \text{ ENTÃO } \dot{\mathbf{x}}(t) = A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t) \quad (1)$$

O vetor $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ contem as variáveis linguísticas do antecedente. Cada variável linguística tem seu próprio universo de discurso $U_{\tilde{x}_1}, \dots, U_{\tilde{x}_n}$ particionado pelos conjuntos nebulosos representando os termos linguísticos correspondentes. A variável $\tilde{x}_t |^{t=1,2,\dots,n}$ pertence ao conjunto nebuloso $F_{j|\tilde{x}_t}^i$ com um valor $\gamma_{F_{j|\tilde{x}_t}^i}^i$ definido por uma função de pertinência $\gamma_{\tilde{x}_t}^i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, com $\gamma_{F_{j|\tilde{x}_t}^i}^i \in \left\{ \gamma_{F_{1|\tilde{x}_t}^i}^i, \gamma_{F_{2|\tilde{x}_t}^i}^i, \dots, \gamma_{F_{p_{\tilde{x}_t}|\tilde{x}_t}^i}^i} \right\}$, onde $p_{\tilde{x}_t}$ é o número de partições do universo de discurso associado à variável linguística \tilde{x}_t . As matrizes A_i e B_i representam os parâmetros do i -ésimo modelo local do sistema nebuloso. O grau de ativação h_i para a regra i é dado pelo operador de conjunção norma- t :

$$h_i = \gamma_{F_{j|\tilde{x}_1}^i}^i \wedge \gamma_{F_{j|\tilde{x}_2}^i}^i \wedge \dots \wedge \gamma_{F_{j|\tilde{x}_n}^i}^i \quad (2)$$

onde \tilde{x}_t^* é algum ponto em $U_{\tilde{x}_t}$. O grau de ativação normalizado para a regra i é definido como:

$$\lambda_i(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{h_i(\tilde{\mathbf{x}})}{\sum_{r=1}^l h_r(\tilde{\mathbf{x}})} \quad (3)$$

Esta normalização implica que

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i(\tilde{\mathbf{x}}) = 1 \quad (4)$$

A resposta do modelo TS é uma soma ponderada dos consequentes, isto é, uma combinação convexa dos modelos locais:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^l \lambda_i(\tilde{\mathbf{x}}) (A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t)) \quad (5)$$

Tal modelo pode ser visto como um sistema linear variante nos parâmetros (*LPV*). Neste sentido, um modelo TS pode ser considerado como uma mapeamento do espaço do antecedente (entrada) à região convexa (politopo) no espaço dos submodelos locais definidos pelos parâmetros do consequente. Esta propriedade simplifica a análise de modelos TS num contexto de sistema linear robusto tanto para identificação como para projeto de controladores com características de malha-fechada desejadas ou análise de estabilidade [11].

2.2 Problema do regulador linear quadrático nebuloso com alocação de pólos

Seja o problema do regulador quadrático ótimo, que possibilita o cálculo sistemático da matriz de ganho \mathbf{K} de realimentação de estado do vetor de controle ótimo dado por

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (6)$$

inerente ao sistema descrito pela equação

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (7)$$

para minimizar a função objetivo, ou o índice de desempenho dado por

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}\mathbf{u}) dt \quad (8)$$

onde \mathbf{Q} e \mathbf{R} são matrizes de ponderação sobre o estado \mathbf{x} e a entrada \mathbf{u} , respectivamente. A matriz \mathbf{Q} é uma matriz hermitiana definida ou semidefinida positiva ou ainda real simétrica e a matriz \mathbf{R} é hermitiana definida positiva ou ainda real simétrica.

No contexto nebuloso, o sistema definido pelas equações (6) e (7) corresponde ao submodelo linear relativo à i -ésima regra do sistema nebuloso. Fazendo a substituição da equação (6) na equação (7), obtêm-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i \mathbf{x} - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i \mathbf{u} = (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i) \mathbf{x} \quad (9)$$

Admitindo-se que a matriz $\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i$ seja estável, ou ainda, que seus autovalores tenham partes reais negativas, é possível obter a matriz de ganho \mathbf{K}_i de realimentação de estado desde que se resolva a chamada *equação matricial reduzida de Riccati*, dada por:

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i - \mathbf{P}\mathbf{B}_i \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (10)$$

para a matriz \mathbf{P} . Existem várias matrizes \mathbf{P} que satisfazem esta equação. Contudo, se o sistema é estável, sempre existe uma matriz positiva definida \mathbf{P} para satisfazê-la. Assim, encontra-se a matriz positiva definida \mathbf{P} que soluciona a equação matricial reduzida de Riccati, o que irá garantir que a matriz $\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i$ seja estável. Por conseguinte, obtêm-se o ganho \mathbf{K}_i através da equação:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{P} \quad (11)$$

A equação (11) fornece a matriz ótima \mathbf{K}_i e conseqüentemente se obtém o sinal de controle ótimo:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{P}\mathbf{x}(t) \quad (12)$$

Cada matriz \mathbf{K}_i encontrada para o i -ésimo subsistema deve garantir a estabilidade dos demais subsistemas. Com o objetivo de possibilitar uma alocação de pólos ótima utilizando as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} , considere-se um sistema genérico de segunda ordem na sua forma canônica controlável:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2^i & -a_1^i \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (13)$$

As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} serão definidas como

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{R} = [\beta] \quad (15)$$

onde $\mu \geq 0$ e $\beta > 0$.

A matriz \mathbf{P} a ser obtida, consiste numa matriz real simétrica dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

onde $p_{12} = p_{21}$. Substituindo o valor da matriz \mathbf{A}_i encontrado em (13) e os valores de \mathbf{Q} , \mathbf{R} e \mathbf{P} definidos em (14), (15), (16), respectivamente, na equação (10) obtêm-se

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_2^i \\ 1 & -a_1^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2^i & -a_1^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\beta]^{-1} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Desenvolvendo-se a equação (17), obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} -2a_2^i p_{12} - \frac{(p_{12})^2}{\beta} + \mu & p_{11} - a_1^i p_{12} - a_2^i p_{22} - \frac{p_{12} p_{22}}{\beta} \\ p_{11} - a_1^i p_{12} - a_2^i p_{22} - \frac{p_{12} p_{22}}{\beta} & 2p_{12} - 2a_1^i p_{22} - \frac{(p_{22})^2}{\beta} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Da equação (18) é obtido o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} -2a_2^i p_{12} - \frac{(p_{12})^2}{\beta} + \mu &= 0 \\ p_{11} - a_1^i p_{12} - a_2^i p_{22} - \frac{p_{12} p_{22}}{\beta} &= 0 \\ 2p_{12} - 2a_1^i p_{22} - \frac{(p_{22})^2}{\beta} + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Da solução do sistema descrito em (19) são obtidos os valores de p_{11} , p_{12} e p_{22} :

$$\begin{aligned} p_{11} &= a_1^i p_{12} + a_2^i p_{22} + \frac{p_{12} p_{22}}{\beta} \\ p_{12} &= -a_2^i \beta + \sqrt{(a_2^i)^2 \beta^2 + \mu \beta} \\ p_{22} &= -a_1^i \beta + \sqrt{(a_1^i)^2 \beta^2 + 2(-a_2^i \beta + \sqrt{(a_2^i)^2 \beta^2 + \mu \beta}) \beta + \beta} \end{aligned} \quad (20)$$

Da equação (11), obtêm-se:

$$\mathbf{K}_i = [\beta]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_{12}}{\beta} & \frac{p_{22}}{\beta} \end{bmatrix} \quad (21)$$

ou ainda

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} k_1^i & k_2^i \end{bmatrix} \quad (22)$$

onde

$$\begin{aligned} k_1^i &= -a_2^i + \frac{\sqrt{(a_2^i)^2 \beta^2 + \mu \beta}}{\beta} \\ k_2^i &= -a_1^i + \frac{\sqrt{(a_1^i)^2 \beta^2 + 2(-a_2^i \beta + \sqrt{(a_2^i)^2 \beta^2 + \mu \beta}) \beta + \beta}}{\beta} \end{aligned} \quad (23)$$

A equação característica do sistema pode ser determinada, uma vez obtida a matriz de ganho \mathbf{K}_i de realimentação de estado, como segue:

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i| &= \\ s^2 + \left(\frac{\sqrt{\beta((a_1^i)^2 \beta - 2a_2^i \beta + 2\sqrt{\beta((a_2^i)^2 \beta + \mu) + 1})}}{\beta} \right) s + \frac{\sqrt{\beta((a_2^i)^2 \beta + \mu)}}{\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Com base na teoria do regulador linear quadrático e nas equações (23) e (24) obtidas, é possível designar pólos para cada um dos submodelos de um dado sistema e projetar a matriz de ganho \mathbf{K}_i de realimentação de estado que aloque tais pólos e que garanta as condições de definição da matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} , em termos de μ e β . O procedimento básico para a aplicação da metodologia proposta é como segue: primeiramente são escolhidos os pólos de malha-fechada desejados para o sistema. Em seguida, determina-se a equação característica relativa a esses pólos. Esta equação será comparada com a equação (24) - daí se obtém um sistema em termos das variáveis μ e β e dos parâmetros dos submodelos. Se forem encontradas soluções reais positivas de μ e β para todos os submodelos do sistema, prossegue-se determinando a matriz de ganho de realimentação de estado a partir da equação (23). Caso contrário, entende-se que não é possível alocar os pólos de malha-fechada escolhidos para o sistema em questão. Tal restrição é oriunda do controle linear quadrático ótimo. Deste modo, cria-se um elo entre a teoria de alocação de pólos e o regulador linear quadrático, permitindo que ao mesmo tempo que se aloque arbitrariamente pólos de malha-fechada para um determinado sistema, também seja satisfeito o critério otimalidade.

3. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção serão apresentados os principais resultados obtidos para ilustrar a abordagem proposta utilizando como exemplo um sistema regulador de um manipulador robótico.

3.1 Regulador nebuloso TS multi-objetivo aplicado a um manipulador robótico

A equação diferencial que representa o comportamento do manipulador é:

$$ml^2\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = T_c \quad (25)$$

onde $B = 1 \text{ kgm}^2/\text{s}$ é o fator de amortecimento; $m = 1 \text{ kg}$ é a massa e $l = 1 \text{ m}$ é o comprimento do braço do manipulador; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ é a constante gravitacional e T_c é a variável de entrada, ou seja, o torque aplicado no manipulador. O ângulo θ é a variável de saída, ou seja, a posição angular do manipulador. Considerando o interesse na dinâmica do sistema na faixa de $[-90^\circ, 90^\circ]$, foi feita a representação do sistema (já linearizado nos pontos de operação) no espaço de estados como segue. Sejam as variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Assim,

$$\begin{cases} x_1(t) = \theta & \Rightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{\theta} \\ x_2(t) = \dot{\theta} = \dot{x}_1(t) & \Rightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{\theta} \end{cases} \quad (26)$$

Daí se define $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$. Considerando a representação no espaço de estados, foi desenvolvido um modelo nebuloso TS utilizando como pontos de operação $0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 60^\circ$, e $\pm 90^\circ$ [12]. Foi obtida a base de regras do modelo nebuloso, composta por 7 regras e também do controlador, que apresenta estrutura bastante similar a do modelo, diferindo na função do consequente que, neste caso, está relacionada ao sinal de controle do sistema.

Modelo	Controlador
R_1 : Se θ é -90° então $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1^*$	R_1 : Se θ é -90° então $\tilde{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{x}}(t) + u_1$
R_2 : Se θ é -60° então $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.9050 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2^*$	R_2 : Se θ é -60° então $\tilde{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{K}_2 \tilde{\mathbf{x}}(t) + u_2$
R_3 : Se θ é -30° então $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8.4957 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_3^*$	R_3 : Se θ é -30° então $\tilde{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{K}_3 \tilde{\mathbf{x}}(t) + u_3$
R_4 : Se θ é 0° então $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_4^*$	R_4 : Se θ é 0° então $\tilde{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{K}_4 \tilde{\mathbf{x}}(t) + u_4$
R_5 : Se θ é 30° então $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8.4957 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_5^*$	R_5 : Se θ é 30° então $\tilde{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{K}_5 \tilde{\mathbf{x}}(t) + u_5$
R_6 : Se θ é 60° então $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.9050 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_6^*$	R_6 : Se θ é 60° então $\tilde{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{K}_6 \tilde{\mathbf{x}}(t) + u_6$
R_7 : Se θ é 90° então $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_7^*$	R_7 : Se θ é 90° então $\tilde{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{K}_7 \tilde{\mathbf{x}}(t) + u_7$

Tabela 1: Bases de regras do modelo e do controlador nebuloso Takagi-Sugeno para o manipulador robótico descrito pela equação (25).

Na base de regras do modelo nebuloso, u_i^* representa uma entrada genérica do submodelo da i -ésima regra. Para a base do controlador tem-se que $u_1 = 9.81$, $u_2 = 3.3592$, $u_3 = 0.4567$, $u_4 = 0$, $u_5 = -0.4557$, $u_6 = -3.3592$, $u_7 = -9.81$. De forma genérica, o sinal de controle nebuloso, neste caso, pode ser escrito como:

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = - \sum_{i=1}^7 \lambda_i \mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^7 \lambda_i u_i \quad (27)$$

onde λ_i denota o grau de ativação normalizado. As matrizes de ganho de realimentação de estado, para os pontos de operação escolhidos de -90° a 90° , na ordem, foram determinadas a partir do procedimento ilustrado na Seção 2.2. Os resultados obtidos

pelos métodos propostos para alguns pólos designados, são mostrados na Tabela 2. Como se pode observar, o segundo elemento de cada uma das matrizes de ganho é sempre o mesmo. Este fato se explica através da ponderação da matriz \mathbf{Q} sobre o vetor de estado $\mathbf{x}(t)$, pois o parâmetro μ afeta somente a variável de estado $x_1(t)$. Assim, quaisquer pólos que porventura venham a ser designados irão proporcionar matrizes de ganho de realimentação de estado, para alocá-los, com essa característica.

Pólos	θ_0	μ	β	\mathbf{K}	Pólos	θ_0	μ	β	\mathbf{K}
[-4, -4]	-90°	08.258	0.0323	[16.000 07]	[-8, -10]	-90°	39.264	0.0061	[80.000 17]
	-60°	05.683	0.0245	[11.095 07]		-60°	36.896	0.0058	[75.095 17]
	-30°	03.830	0.0208	[07.504 07]		-30°	35.156	0.0056	[71.504 17]
	0°	03.156	0.0198	[06.190 07]		0°	34.518	0.0055	[70.190 17]
	30°	03.830	0.0208	[07.504 07]		30°	35.156	0.0056	[71.504 17]
	60°	05.683	0.0245	[11.095 07]		60°	36.896	0.0058	[75.095 17]
	90°	08.258	0.0323	[16.000 07]		90°	39.264	0.0061	[80.000 17]
[-3 ± j2]	-90°	18.778	0.1111	[13.000 05]	[-6 ± j4]	-90°	69.333	0.0256	[52.000 11]
	-60°	07.706	0.0532	[08.095 05]		-60°	54.906	0.0205	[47.095 11]
	-30°	03.725	0.0385	[04.504 05]		-30°	47.004	0.0179	[43.504 11]
	0°	02.542	0.0349	[03.190 05]		0°	44.486	0.0171	[42.190 11]
	30°	03.725	0.0385	[04.504 05]		30°	47.004	0.0179	[43.504 11]
	60°	07.706	0.0532	[08.095 05]		60°	54.906	0.0205	[47.095 11]
	90°	18.778	0.1111	[13.000 05]		90°	69.333	0.0256	[52.000 11]

Tabela 2: Relação entre os critérios de desempenho através das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} , definidas pelas equações (14) e (15), respectivamente, e a alocação dos pólos.

Uma vez projetadas as matrizes de ganho de realimentação de estado para cada um dos submodelos lineares nos pontos de operação do manipulador robótico, tais modelos, juntamente com os ganhos, foram agrupados numa estrutura nebulosa *Takagi-Sugeno* para implementação do sistema regulador proposto.

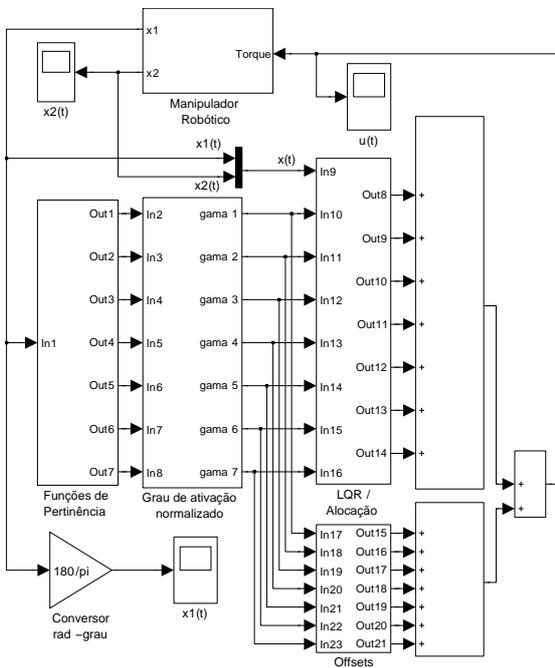


Figura 1: Diagrama de simulação do sistema de controle nebuloso multi-objetivo.

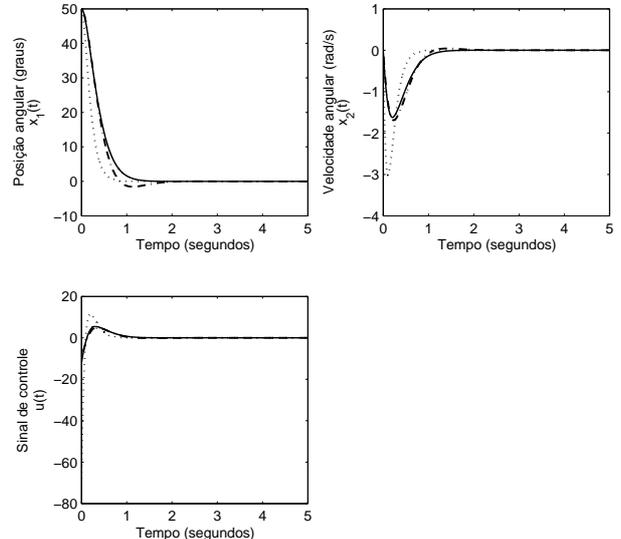


Figura 2: Desempenho do controlador nebuloso multi-objetivo: a linha contínua designa os pólos em [-4, -4], a linha traço e ponto designa os pólos em [-3 ± j2] e a linha pontilhada designa os pólos em [-8, -10].

Na Figura 1 é mostrado o diagrama de simulação no software *Matlab/Simulink*² da estrutura do controlador e da planta (manipulador robótico). Na figura 2 são mostradas as curvas de resposta do sistema, e do sinal de controle, para alguns dos pólos designados na Tabela 2. O bloco 'funções de pertinência' indica a etapa de *fuzificação*, na qual são atribuídas as ponderações sobre a saída $x_1(t)$ conforme o ajuste das funções de pertinência triangulares. Em sequência, os graus de ativação são normalizados segundo a equação (3) e por conseguinte alimentam os blocos 'LQR / Alocação' e também o bloco 'Offsets'. Neste,

²Matlab é um produto da *The MathWorks*.

estão situados os ganhos numéricos advindos da etapa de linearização do sistema e naquele, constam as matrizes de ganho de realimentação de estado relativas aos pólos designados. As saídas desses blocos são somadas, conforme a equação (27) e o sinal de controle gerado é conectado à entrada da planta não-linear, cuja estrutura foi elaborada por simulação analógica com base na equação (25), que rege sua dinâmica. Por fim, são adicionados blocos para visualização dos sinais de posição angular $x_1(t)$, velocidade angular $x_2(t)$ e também do sinal de controle $u(t)$. Foi utilizada uma condição inicial de 50° para a posição angular e de 0 rad/s para a velocidade angular do manipulador.

3.2 Análise da região multi-objetiva factível

Em virtude do caráter multi-objetivo da abordagem proposta, torna-se impossível alocar quaisquer pólos no semiplano esquerdo do plano complexo, como propõe a técnica de alocação de pólos quando vista isoladamente, devido aos critérios de otimalidade estabelecidos. Desse modo, pode-se falar em uma região contida no semiplano esquerdo do plano complexo na qual estão todos os pólos que podem ser alocados, ou seja, pólos que uma vez designados, geram uma solução real positiva em termos das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} conforme a discussão apresentada na seção 2.2. Se, por exemplo, for escolhido o par de pólos complexos conjugados $s_1 = -0.1 + j0.1$ e $s_2 = -0.1 - j0.1$, os valores de μ e β correspondentes são $\mu = -4 \times 10^{-4}$ e $\beta = -1$, o que contraria o que foi anteriormente estabelecido quando das definições das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} nas equações (14) e (15), respectivamente: $\mu \geq 0$ e $\beta > 0$. O mesmo fato ocorre para pólos reais, que também podem fornecer valores de μ e β negativos: tomando-se um pólo $s_1 = -0.5$ e outro pólo $s_2 = -0.7$, os valores de μ e β encontrados são -0.4712 e -3.8462 , respectivamente. Assim, pode-se agora estabelecer a região factível, definida pelas duas técnicas usadas (*LQR* e alocação de pólos) na metodologia proposta, como mostram as figuras 3 e 4:

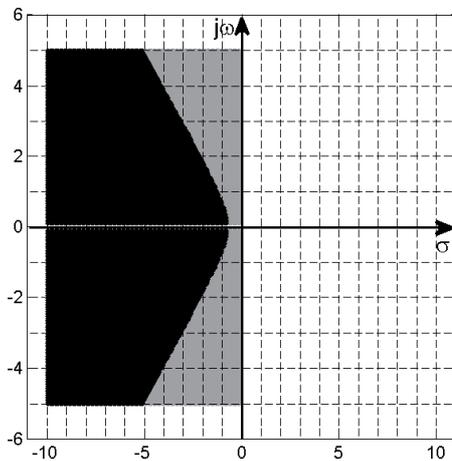


Figura 3: Região multi-objetiva factível para o problema de alocação de pólos complexos.

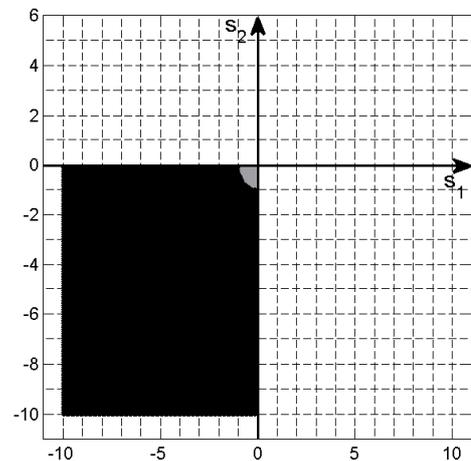


Figura 4: Região multi-objetiva factível para o problema de alocação de pólos reais.

Em ambas as figuras, a região factível está na cor preta e a não-factível está na cor cinza. Na figura 3, a faixa de amostragem de pólos vai de -0.1 a -10 no eixo real e de -5 a 5 no eixo imaginário. Assim, ao se escolher um par de pólos complexos para o sistema, verifica-se primeiramente se eles se localizam na região em preto ou na região em cinza. Caso estejam nesta última, não podem ser alocados. Na figura 4, a faixa de amostragem se estende de -10 a 10 para ambos os eixos s_1 e s_2 . Similarmente ao caso dos complexos, também são designados um par de pólos s_1 e s_2 (reais, neste caso) e então verifica-se se o par ordenado (s_1, s_2) se encontra na região preta ou na região cinza para informação da possibilidade de alocar tais pólos ou não.

4. CONCLUSÃO

A combinação das técnicas de alocação de pólos e *LQR* num contexto nebuloso se mostraram bastante adequadas para projeto de controle. Os resultados de simulação evidenciaram que o controlador proposto permitiu uma resposta temporal satisfatória para o manipulador robótico de acordo com a alocação dos pólos desejados, garantindo a otimalidade de desempenho. A região factível obtida, em virtude do caráter multi-objetivo, mostra que é impossível alocar quaisquer pólos no semiplano esquerdo do plano complexo, considerando-se individualmente a técnica de alocação de pólos devido aos critérios de otimalidade estabelecidos. Considera-se, a partir de então, como pesquisa futura, os seguintes aspectos de interesse:

- Análise de desempenho da metodologia proposta para sistemas dinâmicos com atraso de tempo;
- Aplicação da metodologia proposta no contexto adaptativo, uma vez que formulações analíticas para o projeto do controlador nebuloso foram obtidas;
- Estudo e aplicação da metodologia proposta no contexto multivariável.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão (FAPEMA) pelo fomento à pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] H. H. Choi. *LMI-Based Nonlinear Fuzzy Observer-Controller Design for Uncertain MIMO Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Volume 15, Number 5, pp. 956-971, October 2007.
- [2] T.-H. S. Li and S.-H. Tsai. *T-S Fuzzy Bilinear Model and Fuzzy Controller Design for a Class of Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Volume 15, Number 3, pp. 494-506, June 2007.
- [3] B. Chen, X. Liu and S. Tong. *Adaptive Fuzzy Output Tracking Control of MIMO Nonlinear Uncertain Systems*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Volume 15, Number 2, pp. 287-300, April 2007.
- [4] B. Ghosh, C. F. Martin and Y. Zhou. *Emergent Problems In Nonlinear Systems And Control*. Springer, 2009.
- [5] Y. Chen, B. Yang, A. Abraham and L. Peng. *Automatic Design of Hierarchical Takagi-Sugeno Type Fuzzy Systems Using Evolutionary Algorithms*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Volume 15, Number 3, pp. 385-397, June 2007.
- [6] M. Mohammadian, R. Amin, X. Yao, M. Mohammadian, X. Yao and R. A. Sarker. *Computational Intelligence in Control*. IGI Global, 2002.
- [7] W. Pedrycz and F. Gomide. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. Wiley-IEEE Press, 2007.
- [8] J. M. A. Márquez, A. J. B. Pina and M. E. G. Arias. *A General and Formal Methodology to Design Stable Nonlinear Fuzzy Control Systems*. IEEE International Transaction on Fuzzy Systems, October 2009.
- [9] Y. Zhao, Q. Sun, Z. Wang and X. Han. *Robust Fuzzy Control for Chaotic (Hyperchaotic) Systems with Parametric Uncertainties Based on LMI Technique*. IEEE Chinese Control and Decision Conference, 2009.
- [10] D. Chen, J. Yang and B. Xu. *Adaptive optimal control of a class of uncertain nonlinear systems using fuzzy logic and neural networks*. 43 rd IEEE International Conference on Decision and Control, December 2004.
- [11] G. L. O. Serra. *Propostas de Metodologias para Identificação e Controle Inteligentes - Tese de Doutorado*. Unicamp / FEEC / DMSCI, 2005.
- [12] R. J. M. Santos and G. L. O. Serra. *Modelagem Nebulosa Takagi-Sugeno no Espaço de Estados: Estudo de Caso Aplicado a um Manipulador Robótico*. I Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, Novembro 2010.