

MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS NEBULOSAS IMPLICATIVAS BASEADAS EM NORMAS TRIANGULARES ARQUIMEDIANAS

MARCOS EDUARDO VALLE*, PETER SUSSNER*

**Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC)
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Campinas, São Paulo, Brasil, CEP 13083-859*

Emails: `mevalle@ime.unicamp.br`, `sussner@ime.unicamp.br`

Abstract— *Associative memories* (AMs) are designed for the storage of pattern associations and the retrieval of the desired output upon presentation of a possibly noisy or incomplete version of an input pattern. In particular, an *implicative fuzzy associative memory* (IFAM) is a fuzzy AM model that applies a \max - T product, where T represent a continuous triangular norm, during the recall phase. In this paper, we focus on IFAM models that employ Archimedean triangular norms. Specifically, we present a theorem that completely characterizes the output patterns of these IFAM models in terms of combinations of maximums and minimums of transformed versions of the original patterns.

Keywords— Associative Memories, Fuzzy Set Theory, Archimedean Triangular Norms

Resumo— *Memórias Associativas* (AMs) são projetadas para armazenar associações e recordar uma saída desejada mesmo após a apresentação de uma versão incompleta ou distorcida de um padrão de entrada. Em particular, uma *Memória Associativa Nebulosa Implicativa* (IFAM) é uma AM nebulosa que aplica um produto \max - T , onde T é uma norma triangular contínua, na fase de recordação. Esse artigo discute modelos de IFAMs que empregam normas triangulares Arquimedianas. Especificamente, é apresentado um teorema que caracteriza completamente os padrões recordados por essas IFAMs em termos de combinações de máximos e mínimos de versões transformadas dos padrões originais.

Palavras-chave— Memórias Associativas, Teoria dos Conjuntos Nebulosos, Normas Triangulares Arquimedianas

1 Introdução

Em termos gerais, uma *Memória Associativa* (AM) é um modelo inspirado no cérebro humano e projetado para armazenar pares de entrada e saída. Além disso, uma AM deve ser capaz de recordar uma saída desejada mesmo após a apresentação de uma versão incompleta ou distorcida de um padrão de entrada [4, 9, 6, 16, 18].

Resumidamente, as pesquisas em memória associativa iniciaram na metade do século XX e receberam mais atenção nos anos 1980 após a publicação do famoso artigo de Hopfield [1, 6]. Nos anos 1990, foram apresentados vários modelos que estendem a rede de Hopfield, por exemplo, a *Memória Associativa de Capacidade Exponencial* (ECAM) [2] e a *Memória Associativa Bidirecional* (BAM) [10]. Entretanto, tanto a rede de Hopfield como a ECAM e a BAM, são modelos usados para armazenar padrões binários. Em contraste com os modelos binários, os modelos de memórias associativas baseados na morfologia matemática e na teoria dos conjuntos nebulosos podem ser usados para armazenar padrões em tons de cinza [16, 19, 17, 18, 20, 23].

As *Memórias Associativas Nebulosas* (FAMs) são modelos de memória associativa descritos por redes neurais nebulosas que armazenam padrões nebulosos, i.e., padrões cujos elementos pertencem ao intervalo $[0, 1]$. A memória associativa nebulosa de Kosko, referida simplesmente por FAM de Kosko, representa o modelo mais conhecido de

FAM [11]. A FAM de Kosko foi aplicada com sucesso em problemas de controle e rastreamento de alvos [11]. Variações e extensões da FAM de Kosko incluem os modelos de Junbo *et al.* [7], Chung e Lee [3] e Liu [12]. Recentemente, Valle e Sussner introduziram novos modelos de FAMs, chamados *Memórias Associativas Nebulosas Implicativas* (IFAMs), que generalizam ou estendem os modelos mencionados anteriormente [18, 20, 22, 23]. As IFAMs apresentam propriedades interessantes no caso autoassociativo como convergência numa única iteração e capacidade de armazenamento ilimitada, i.e., pode-se armazenar quando os padrões forem desejados nesses modelos. Além disso, as IFAMs apresentaram bons resultados em problemas de previsão de séries temporais [19, 18, 20]. Recentemente, Sussner e Valle observaram que as principais FAMs, incluindo as IFAMs, efetuam operações elementares da morfologia matemática e podem ser classificadas como *Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas* (FMAMs) [22, 20].

Os primeiros modelos de AM baseados na morfologia matemática foram introduzidos por Ritter e Sussner e são referidos simplesmente como *Memórias Associativas Morfológicas* (MAMs) [15, 16]. Esses modelos efetuam operações elementares da morfologia matemática em cada neurônio [5, 19, 20, 22]. Resultados que caracterizam completamente a fase de recordação das MAMs foram apresentados recentemente por Sussner e Valle [19, 17]. Em poucas palavras, foi demonstrado que os padrões recordados representam com-

binações de máximos e mínimos dos padrões originais com valores adicionados de uma constante. A caracterização da fase de recordação das MAMs colaborou para o desenvolvimento de aplicações desses modelos em problemas de reconstrução de imagens, classificação de padrões e previsão de séries temporais [19, 17].

Esse artigo apresenta um resultado que caracteriza completamente a fase de recordação da classe das *IFAMs Arquimedianas*, i.e., a classe das IFAMs baseadas em normas triangulares Arquimedianas. O presente artigo está organizado em 5 seções. A seção 2 apresenta os conceitos básicos da teoria dos conjuntos nebulosos, incluindo o conceito de norma triangular Arquimediana e R-implicação. Uma breve revisão das IFAMs e do armazenamento nebuloso R-implicativo é apresentada na seção 3. A seção 4 introduz o teorema que caracteriza completamente a fase de recordação das IFAMs Arquimedianas. O artigo termina com a conclusão na seção 5.

2 Conceitos Básicos da Teoria dos Conjuntos Nebulosos

A teoria dos conjuntos nebulosos foi introduzida por Lotfi Zadeh como uma ferramenta para modelar a imprecisão e a ambigüidade que surge em sistemas complexos [13, 14]. Um conjunto nebuloso é definido como uma função \mathbf{x} de um conjunto \mathcal{U} (universo de discurso) para o intervalo $[0, 1]$. A função \mathbf{x} é referida como *função de pertinência* e o valor $\mathbf{x}(u)$ representa o *grau de pertinência* de u no conjunto nebuloso \mathbf{x} . Nesse artigo serão empregados apenas conjuntos nebulosos \mathbf{x} e \mathbf{y} definidos sobre universos de discurso finitos $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_m\}$, respectivamente. Nesse caso, \mathbf{x} e \mathbf{y} podem ser representados por vetores nos hiper-cubos $[0, 1]^n$ e $[0, 1]^m$ onde $x_j = \mathbf{x}(u_j)$, para $j = 1, \dots, n$, e $y_i = \mathbf{y}(v_i)$, para $i = 1, \dots, m$.

Muitas operações entre conjuntos nebulosos estão baseadas nos conceitos de norma triangular (t-norma) e implicação nebulosa [13, 14]. Esses conceitos formam a base para as IFAMs e o armazenamento nebuloso R-implicativo apresentados na próxima seção.

Definição 1 (Norma Triangular) *Uma norma triangular, ou simplesmente t-norma, é um operador $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ crescente, comutativo e associativo que satisfaz $T(x, 1) = x$ para todo $x \in [0, 1]$.*

Em particular, uma t-norma T_f é Arquimediana se e somente se T_f é contínua em ambos os argumentos e $T_f(x, x) < x$ para todo $x \in (0, 1)$.

A definição 1 introduz a classe mais geral de t-normas e a sub-classe das t-normas Arquimedianas. Nesse artigo serão consideradas apenas t-normas Arquimedianas. Entretanto, é importante

observar que um operador $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma t-norma contínua se e somente se T é uma soma ordinal de t-normas Arquimedianas [8].

A seguinte proposição revela que uma t-norma Arquimediana pode ser representada em termos de uma função contínua de uma única variável [13]. Essa proposição constitui a base para os resultados desenvolvidos na seção 4.

Proposição 1 *Uma t-norma T_f é Arquimediana se e somente se existe $a \in [0, 1]$ e um isomorfismo de ordem¹ $f : [0, 1] \rightarrow [a, 1]$ tal que*

$$T_f(x, y) = f^{-1} \left([f(x)f(y)] \vee a \right), \quad (1)$$

para todo $x, y \in [0, 1]$. A função f em (1) é chamada função geradora da t-norma T_f .

Notação 1 *Nesse artigo, os símbolos “ \vee ” e “ \wedge ” representam as operações de supremo (ou máximo) e ínfimo (ou mínimo), respectivamente. Em particular, $a \vee b = \max(a, b)$ e $a \wedge b = \min(a, b)$.*

O produto, denotado por T_P , é um exemplo de t-norma Arquimediana com função geradora $f(x) = x$. O operador dado pela equação $T_L(x, y) = 0 \vee (x + y - 1)$ é referido como t-norma de Lukasiewicz. Note que T_L é uma t-norma Arquimediana com função geradora $f(x) = e^{x-1}$.

Uma t-norma contínua T pode ser usada para definir uma implicação nebulosa como segue [13]:

Definição 2 (R-implicação) *Seja $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma t-norma contínua. A R-implicação associada à t-norma T é o operador $I : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dado pela seguinte equação para todo $x, y \in [0, 1]$:*

$$I(x, y) = \bigvee \{z \in [0, 1] : T(x, z) \leq y\}. \quad (2)$$

É importante observar que existe na literatura outras formas de definir uma implicação nebulosa [13, 14]. Entretanto, a fase de armazenamento das IFAMs está baseada em R-implicações. Precisamente, a proposição 3 que caracteriza o armazenamento nebuloso R-implicativo só vale para implicações dadas pela equação (2).

Em particular, uma R-implicação associada à uma t-norma Arquimediana pode ser obtida facilmente usando a função geradora da t-norma. Especificamente, vale a seguinte proposição [13].

Proposição 2 *Seja T_f uma t-norma Arquimediana e f sua função geradora. A R-implicação associada à T_f , denotada por I_f , é dada pela seguinte equação para todo $x, y \in [0, 1]$.*

$$I_f(x, y) = f^{-1} \left(\left[\frac{f(y)}{f(x)} \right] \wedge 1 \right). \quad (3)$$

¹Lembre-se que um isomorfismo de ordem $f : [0, 1] \rightarrow [a, 1]$ é uma bijeção tal que $x \leq y$ sse $f(x) \leq f(y)$.

Pode-se verificar que as implicações dadas pelas equações (4) e (5) abaixo representam as R-implicações associadas ao produto e a t-norma de Lukasiewicz, respectivamente.

$$I_P(x, y) = 1 \wedge \left(\frac{y}{x}\right), \quad (4)$$

$$I_L(x, y) = 1 \wedge (y - x + 1). \quad (5)$$

Finalmente, t-normas e R-implicações podem ser combinadas com as operações de máximo e mínimo para formar produtos matriciais. Considere matrizes $A \in [0, 1]^{m \times k}$ e $B \in [0, 1]^{k \times n}$. O produto *max-T* e o produto *min-I* de A por B , denotados respectivamente por $C = A \circ B$ e $D = A \otimes B$, são definidos através das seguintes equações para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, respectivamente:

$$c_{ij} = \bigvee_{l=1}^k T(a_{il}, b_{lj}) \quad \text{e} \quad d_{ij} = \bigwedge_{l=1}^k I(b_{lj}, a_{il}). \quad (6)$$

Normas triangulares particulares definem produtos *max-T* específicos. Dado um produto *max-T*, indica-se a t-norma empregada em (6) por meio de um sub-índice. Uma notação semelhante é empregada para descrever o produto *min-I*. Em particular, \circ_f e \otimes_f denotam produtos *max-T_f* e *min-I_f* onde T_f é uma t-norma Arquimediana e I_f representa uma R-implicação dada pela equação (3).

3 Introdução às Memórias Associativas Nebulosas Implicativas

Um problema de AM pode ser formulado matematicamente nos seguintes termos: Dado um conjunto de associações $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$, chamado *conjunto das memórias fundamentais*, determine uma aplicação G tal que $G(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, k$. Além disso, a aplicação G deve possuir uma certa tolerância com respeito à ruído, i.e., $G(\tilde{\mathbf{x}}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$ para versões corrompidas ou incompletas $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$ de \mathbf{x}^ξ [4].

Nas IFAMs, a aplicação G é descrita por uma rede neural nebulosa de camada única com neurônios *max-T*, onde T é uma t-norma contínua [18, 20, 23]. Dado um padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$, uma matriz dos pesos sinápticos $W \in [0, 1]^{m \times n}$ e um vetor bias $\boldsymbol{\theta} \in [0, 1]^m$, a saída ou padrão recordado pela IFAM é determinado pela seguinte equação:

$$\mathbf{y} = (W \circ \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta}. \quad (7)$$

A matriz dos pesos sinápticos W e o vetor bias $\boldsymbol{\theta}$ de uma IFAM são calculados através do *armazenamento nebuloso R-implicativo* [18, 20, 21]. Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$, defina $X = [\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k] \in [0, 1]^{n \times k}$ e $Y = [\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k] \in [0, 1]^{k \times n}$. No armazenamento nebu-

loso R-implicativo, W e $\boldsymbol{\theta}$ são dados pelas equações

$$W = Y \otimes X^T \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta} = \bigwedge_{\xi=1}^k \mathbf{y}^\xi, \quad (8)$$

onde \otimes representa o produto *min-I* baseado na R-implicação associada à t-norma contínua empregada no produto *max-T* em (7).

A matriz dos pesos sinápticos W e o vetor bias $\boldsymbol{\theta}$ fornecidos pelo armazenamento nebuloso R-implicativo satisfazem a seguinte proposição [20].

Proposição 3 *Considere um conjunto $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ de pares de entrada e saída. A matriz de pesos sinápticos W e o vetor bias $\boldsymbol{\theta}$ fornecidos pelo armazenamento nebuloso R-implicativo são tais que $[W, \boldsymbol{\theta}]$ representa o supremo do conjunto*

$$\left\{ [A, \boldsymbol{\beta}] : (A \circ \mathbf{x}^\xi) \vee \boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{y}^\xi, \forall \xi = 1, \dots, k \right\}, \quad (9)$$

onde $[W, \boldsymbol{\theta}]$ (resp. $[A, \boldsymbol{\beta}]$) é a matriz $m \times (n + 1)$ obtida concatenando $W \in [0, 1]^{m \times n}$ e $\boldsymbol{\theta} \in [0, 1]^m$ (resp. A e $\boldsymbol{\beta}$).

Note que a proposição 3 pode ser interpretada como uma condição de otimalidade do armazenamento nebuloso R-implicativo no seguinte sentido: Se existe uma matriz A e um vetor $\boldsymbol{\beta}$ tais que $(A \circ \mathbf{x}^\xi) \vee \boldsymbol{\beta} = \mathbf{y}^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, k$, então W e $\boldsymbol{\theta}$ fornecidos por (8) satisfazem as seguintes expressões: $A \leq W$, $\boldsymbol{\beta} \leq \boldsymbol{\theta}$ e $(W \circ \mathbf{x}^\xi) \vee \boldsymbol{\theta} = \mathbf{y}^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, k$.

O seguinte exemplo apresenta as fases de armazenamento e recordação da IFAM de Lukasiewicz. O mesmo exemplo será considerado na próxima seção para validar o teorema que caracteriza a fase de recordação de uma IFAM Arquimediana. É importante observar que a IFAM de Lukasiewicz está intimamente relacionada com as *memórias associativas morfológicas* introduzidas por Sussner e Ritter [15, 16]. Sobretudo, esse modelo de IFAM apresentou bons resultados em problemas de previsão de séries temporais [19, 18, 20].

Exemplo 1 Considere padrões $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$ e $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2$ correspondendo às colunas das matrizes $X \in [0, 1]^{3 \times 2}$ e $Y \in [0, 1]^{5 \times 2}$ dadas pelas seguintes equações.

$$X = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.9 \\ 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.8 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

A matriz dos pesos sinápticos $W \in [0, 1]^{5 \times 3}$ e o vetor bias $\boldsymbol{\theta} \in [0, 1]^5$ fornecidos pelo armazenamento nebuloso R-implicativo baseado na implicação de Lukasiewicz são dados pelas seguintes

equações, respectivamente:

$$W = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.6 \\ 0.9 & 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.9 & 0.9 \\ 0.3 & 0.6 & 0.9 \\ 0.5 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Dado o padrão de entrada

$$\mathbf{x} = [0.6 \quad 0.2 \quad 0.7]^T, \quad (12)$$

o padrão $\mathbf{y} = (W \circ_L \mathbf{x}) \vee \boldsymbol{\theta}$ recordado pela IFAM de Lukasiewicz é

$$\mathbf{y} = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0.6 \quad 0.7]^T. \quad (13)$$

Note que \mathbf{y} não corresponde a nenhum dos padrões originais. O teorema 1 apresentado na próxima seção esclarece, entre outras coisas, a relação entre a saída \mathbf{y} e os padrões originais \mathbf{y}^1 e \mathbf{y}^2 .

4 Caracterização da Fase de Recordação das IFAMs Arquimedianas

Essa seção apresenta um teorema que caracteriza completamente a fase de recordação das IFAMs baseadas em t-normas Arquimedianas. Devido a limitação no número de páginas, não será apresentada a demonstração desse resultado. Todavia, serão apresentados exemplos e algumas observações sobre as conseqüências do teorema.

Teorema 1 *Seja T_f uma t-norma Arquimediana com função geradora $f : [0, 1] \rightarrow [a, 1]$. Considere um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ e defina $W \in [0, 1]^{m \times n}$ e $\boldsymbol{\theta} \in [0, 1]^m$ através do armazenamento nebuloso R-implicativo. Dado um padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$, o padrão $\mathbf{y} \in [0, 1]^m$ recordado pela IFAM Arquimediana satisfaz a seguinte equação*

$$\mathbf{y} = \left\{ \bigvee_{j=1}^n \left[\left(\bigwedge_{\xi=1}^k \tilde{T}_f(\alpha_j^\xi, \mathbf{y}^\xi) \right) \wedge x_j \right] \right\} \vee \boldsymbol{\theta}. \quad (14)$$

onde $\tilde{T}_f : [0, 1/a] \times [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$ é o operador dado pela seguinte equação para todo $i = 1, \dots, m$:

$$\left[\tilde{T}_f(\alpha, \mathbf{z}) \right]_i = f^{-1} \left(\left\{ [\alpha f(z_i)] \wedge 1 \right\} \vee a \right). \quad (15)$$

O coeficiente α_j^ξ em (14) satisfaz a equação

$$\alpha_j^\xi = \frac{f(x_j)}{f(x_j^\xi)}, \quad (16)$$

para todo $j = 1, \dots, n$ e $\xi = 1, \dots, k$.

Observação 1 O padrão \mathbf{y} em (14) também pode ser expresso em termos da seguinte equação:

$$\mathbf{y} = \left[\bigvee_{j=1}^n \left(\bigwedge_{\xi=1}^k \left(\tilde{T}_f(\alpha_j^\xi, \mathbf{y}^\xi) \wedge x_j \right) \right) \right] \vee \boldsymbol{\theta}. \quad (17)$$

Logo, o padrão recordado por uma IFAM Arquimediana é formado por combinações de máximos e mínimos de transformações $\tilde{T}_f(\alpha_j^\xi, \mathbf{y}^\xi) \wedge x_j$ das memórias fundamentais.

Observação 2 Se $a = 0$, então o operador \tilde{T} é definido no domínio $\mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0} \times [0, 1]^m$, onde $\mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$.

Observação 3 O operador \tilde{T}_f representa uma extensão da t-norma T_f para $[0, 1/a] \times [0, 1]^m$ (lembre-se que $a \in [0, 1]$) no seguinte sentido:

1. Se $0 \leq \alpha \leq 1$ então existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = \alpha$ e pode-se mostrar que

$$\left[\tilde{T}_f(\alpha, \mathbf{z}) \right]_i = T_f(c, z_i). \quad (18)$$

Em outras palavras, cada componente de $T_f(\alpha, \mathbf{z})$ é equivalente à aplicação da t-norma T_f em c e z_i .

2. Se $1 < \alpha \leq 1/a$, então $\alpha f(z_i) \geq f(z_i)$ para todo $i = 1, \dots, m$. Usando a monotonicidade dos operadores \vee, \wedge e da função f^{-1} , conclui-se que

$$\left[\tilde{T}_f(\alpha, \mathbf{z}) \right]_i \geq f^{-1} \left(f(z_i) \vee a \right) = z_i, \quad (19)$$

para todo $i = 1, \dots, m$. Em outras palavras, $\tilde{T}_f(\alpha, \mathbf{z}) \geq \mathbf{z}$ se $\alpha \geq 1$.

Em ambos os casos, o padrão $\tilde{T}_f(\alpha, \mathbf{z})$ preserva a “forma” do padrão \mathbf{z} . Essa afirmação torna-se mais clara observando a figura 1 que apresenta os gráficos de $\tilde{T}_L(\alpha_i, \mathbf{z})$ e $\tilde{T}_P(\alpha_i, \mathbf{z})$ para $i = 1, 2$, onde $\alpha_1 = 0.7$ e $\alpha_2 = 1.5$. Note que as inequações $\tilde{T}_f(0.7, \mathbf{z}) \leq \mathbf{z} \leq \tilde{T}_f(1.5, \mathbf{z})$ foram satisfeitas.

O seguinte exemplo apresenta o operador \tilde{T}_L que estende a t-norma de Lukasiewicz. Lembre-se que a função geradora da t-norma de Lukasiewicz é $f(x) = e^{x-1}$. Logo, $a = f(0) = e^{-1}$ e $f^{-1}(y) = \log(y) + 1$, para todo $y \in [a, 1]$.

Exemplo 2 Considere $\alpha \in [0, 1/a]$ e $\mathbf{z} \in [0, 1]^m$. Para facilitar a exposição, defina $c = \log(x \vee a) + 1$. Pode-se mostrar que o operador \tilde{T}_L dado pela equação (15) satisfaz a seguinte equação para todo $i = 1, \dots, m$:

$$\left[\tilde{T}_L(\alpha, \mathbf{z}) \right]_i = [(c + z_i - 1) \wedge 1] \vee 0. \quad (20)$$

Note que, se $0 \leq \alpha \leq 1$, então $0 \leq c \leq 1$. Nesse caso, tem-se $c + z_i - 1 \leq 1$ para todor $z_i \in [0, 1]$ e

$$\left[\tilde{T}_L(\alpha, \mathbf{z}) \right]_i = (c + z_i - 1) \vee 0 = T_L(c, z_i). \quad (21)$$

Portanto, \tilde{T}_L pode ser visto como uma extensão da t-norma de Lukasiewicz.

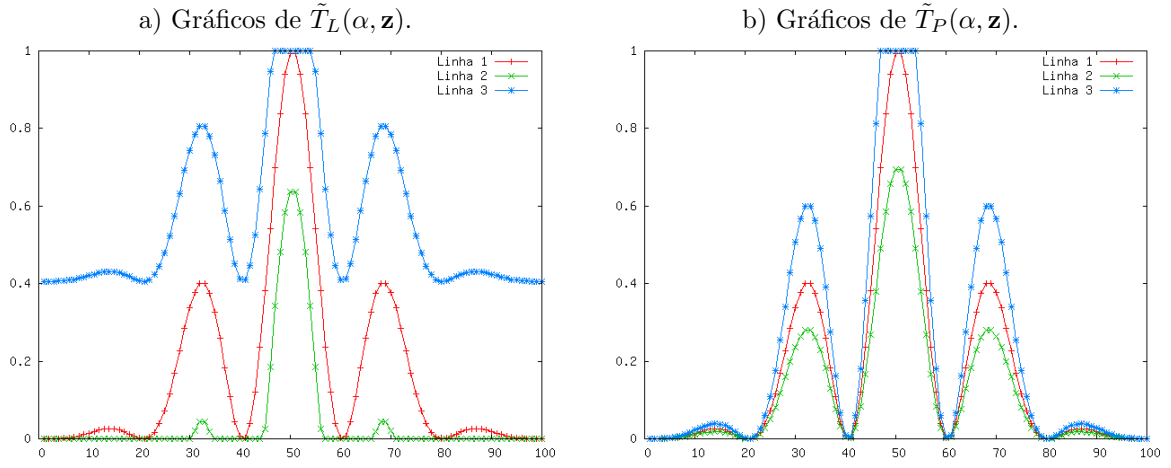


Figura 1: A linha vermelha marcada com o símbolo “+” (Linha 1) corresponde ao padrão original $\mathbf{z} \in [0, 1]^{100}$. A linha verde com “x” (Linha 2) corresponde ao padrão $\tilde{T}_L(0.7, \mathbf{z})$ em a) e $\tilde{T}_P(0.7, \mathbf{z})$ em b). Finalmente, a linha azul com “*” representa $\tilde{T}_L(1.5, \mathbf{z})$ em a) e $\tilde{T}_P(1.5, \mathbf{z})$ em b).

Observação 4 O coeficiente α_j^ξ em (14) pode ser interpretado como uma medida do quanto x_j é maior, menor ou igual à x_j^ξ . Por exemplo, $\alpha_j^\xi = 1$ se e somente se $x_j = x_j^\xi$.

Exemplo 3 Na IFAM de Lukasiewicz, os coeficientes α_j^ξ são determinados pela seguinte equação:

$$\alpha_j^\xi = (e^{x_j} - 1) / (e^{x_j^\xi} - 1) = e^{x_j - x_j^\xi}. \quad (22)$$

Exemplo 4 Nesse exemplo, a equação (14) que caracteriza a fase de recordação de uma IFAM Arquimediana será aplicada para obter o padrão recordado pela IFAM de Lukasiewicz do exemplo 1. Para tanto, considere $X = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2]$ e $Y = [\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2]$ fornecidos em (10) e o padrão de entrada \mathbf{x} dado em (12).

Primeiramente, devem ser calculados os coeficientes $\alpha_j^\xi \in [0, 1/a]$ para $j = 1, 2, 3$ e $\xi = 1, 2$. Aplicando a equação (16), ou (22), obtém-se:

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 &= 1.34986, & \alpha_2^1 &= 0.81873, & \alpha_3^1 &= 1.10517, \\ \alpha_1^2 &= 0.81873, & \alpha_2^2 &= 0.74082, & \alpha_3^2 &= 1.64872. \end{aligned}$$

O próximo passo consiste em calcular os padrões $\tilde{T}_L(\alpha_j^\xi, \mathbf{y}^\xi)$ para $j = 1, 2, 3$ e $\xi = 1, 2$ através de (15) ou (20). As equações (23) e (24) abaixo apresentam os padrões $\tilde{T}_L(\alpha_1^1, \mathbf{y}^1)$ e $\tilde{T}_L(\alpha_1^2, \mathbf{y}^2)$ como exemplo:

$$\tilde{T}_L(\alpha_1^1, \mathbf{y}^1) = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.8 \quad 1.0 \quad 1.0]^T, \quad (23)$$

$$\tilde{T}_L(\alpha_1^2, \mathbf{y}^2) = [0.7 \quad 0.6 \quad 0.2 \quad 0.0 \quad 0.1]^T. \quad (24)$$

Note que $\alpha_1^2 \leq 1 \leq \alpha_1^1$, logo $\tilde{T}_L(\alpha_1^1, \mathbf{y}^1) \geq \mathbf{y}^1$ enquanto que $\tilde{T}_L(\alpha_1^2, \mathbf{y}^2) \leq \mathbf{y}^2$.

Defina agora vetores $\mathbf{u}_j = \tilde{T}_L(\alpha_j^1, \mathbf{y}^1) \wedge$

$\tilde{T}_L(\alpha_j^2, \mathbf{y}^2)$ para $j = 1, 2, 3$. Nesse exemplo tem-se

$$\mathbf{u}_1 = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.2 \quad 0.0 \quad 0.1]^T, \quad (25)$$

$$\mathbf{u}_2 = [0.0 \quad 0.0 \quad 0.1 \quad 0.0 \quad 0.0]^T, \quad (26)$$

$$\mathbf{u}_3 = [0.3 \quad 0.3 \quad 0.6 \quad 0.6 \quad 0.8]^T. \quad (27)$$

Observe que \mathbf{u}_j representa o termo entre os parênteses centrais da equação (14).

Finalmente, o padrão recordado pela IFAM é o máximo entre $\boldsymbol{\theta}$ e os vetores $\mathbf{u}_j \wedge x_j$, para $j = 1, 2, 3$. Em outras palavras, o padrão recordado $\mathbf{y} = (\mathbf{u}_1 \wedge x_1) \vee (\mathbf{u}_2 \wedge x_2) \vee (\mathbf{u}_3 \wedge x_3) \vee \boldsymbol{\theta}$ satisfaz:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.2 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.1 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ 0.7 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ 0.7 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Como era de se esperar, o resultado em (28) coincide com o padrão apresentado em (13).

5 Conclusão

A principal contribuição desse artigo encontra-se no teorema 1 que caracteriza completamente a fase de recordação das IFAMs Arquimedianas. Resumidamente, o padrão recordado por uma IFAM Arquimediana representa combinações de máximos e mínimos de transformações das memórias fundamentais. As transformações aplicadas podem ser interpretadas como operações que estendem a t-norma Arquimediana. Espera-se que o teorema 1 apresentado nesse artigo contribua diretamente para o desenvolvimento de novas aplicações das IFAMs.

Agradecimentos

Este trabalho teve apoio da FAPESP e do CNPq, processos nos. 06/06818-1 e 306040/2006-9, res-

pectivamente.

Referências

- [1] J. A. Anderson and E. Rosenfeld, editors. *Neurocomputing: Foundations of Research*, volume 1. MIT Press, Cambridge, MA, 1989.
- [2] T. Chiueh and R. Goodman. Recurrent correlation associative memories. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 2(2):275–284, Mar. 1991.
- [3] F. Chung and T. Lee. On fuzzy associative memory with multiple-rule storage capacity. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(3):375–384, August 1996.
- [4] M. H. Hassoun, editor. *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [5] H. Heijmans. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.
- [6] J. J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79:2554–2558, Apr. 1982.
- [7] F. Junbo, J. Fan, and S. Yan. A learning rule for fuzzy associative memories. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, volume 7, pages 4273 – 4277, June 1994.
- [8] E. P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. Triangular norms. position paper III: continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 145(3):439–454, August 2004.
- [9] T. Kohonen. *Self-Organization and Associative Memory*. Springer Verlag, 1984.
- [10] B. Kosko. Bidirectional associative memories. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18:49–60, 1988.
- [11] B. Kosko. *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1992.
- [12] P. Liu. The fuzzy associative memory of max-min fuzzy neural networks with threshold. *Fuzzy Sets and Systems*, 107(2):147–157, Oct. 1999.
- [13] H. T. Nguyen and E. A. Walker. *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman & Hall/CRC, 2 edition, 2000.
- [14] W. Pedrycz and F. Gomide. *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. MIT Press Complex Adaptive Systems, 1998.
- [15] G. X. Ritter and P. Sussner. An introduction to morphological neural networks. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, pages 709–717, Vienna, Austria, 1996.
- [16] G. X. Ritter, P. Sussner, and J. L. D. de Leon. Morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9(2):281–293, Mar. 1998.
- [17] P. Sussner and M. E. Valle. Grayscale morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17(3):559–570, May 2006.
- [18] P. Sussner and M. E. Valle. Implicative fuzzy associative memories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(6):793–807, Dec. 2006.
- [19] P. Sussner and M. E. Valle. Morphological and certain fuzzy morphological associative memories for classification and prediction. In V. Kambhampati and G. Ritter, editors, *Computational Intelligence Based on Lattice Theory*, chapter 8, pages 149–172. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2007.
- [20] M. E. Valle. *Fundamentos e Aplicações de Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, Brasil, Fevereiro 2007.
- [21] M. E. Valle and P. Sussner. IFAMs - memórias associativas baseadas no aprendizado nebuloso implicativo. In *Anais do VII Congresso Brasileiro de Redes Neurais*, Natal, October 2005.
- [22] M. E. Valle and P. Sussner. Fuzzy associative memories from the perspective of mathematical morphology. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2007)*, London, United Kingdom, July 2007.
- [23] M. E. Valle, P. Sussner, and F. Gomide. Introduction to implicative fuzzy associative memories. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, pages 925 – 931, Hungary, July 2004.