

## Simulação da Rede NRBF Aplicada à Detecção de Símbolos QPSK em um Modelo de Canal Seletivo em Frequência

Wamberto J. L. Queiroz    Marcelo S. Alencar\*

Laboratório de Comunicações, DEE, COPELE – Universidade Federal da Paraíba  
58.109-970 - Campina Grande, PB, Brasil  
{wamberto,malencar}@dee.ufpb.br

### Abstract

*This paper presents an analysis, using simulation, for the performance of two detector structures which have been developed with a radial basis function neural network. The structures are called feedback and non-feedback detector, respectively. The performance evaluation of both schemes was performed using a channel model that presents Doppler effects and frequency selectivity.*

### 1. Introdução

Na maioria dos sistemas de comunicações móveis, o canal de comunicações impõe à informação transmitida variações na amplitude e na fase que dificultam a recepção dos símbolos originais. Em modelos de locais onde há uma grande concentração de edificações, árvores e variações topográficas os símbolos enviados pela fonte são atrasados, refletidos e refratados no seu percurso até o receptor. O resultado desses efeitos é uma soma de componentes atrasadas e com diferentes ângulos de fase, resultando no receptor em um sinal diferente do sinal original. Em casos como esse, é necessário o uso de estruturas que estimem os símbolos enviados pela fonte e recuperem a informação original.

Nesse contexto, são analisadas nesse trabalho duas estruturas de detecção obtidas a partir da teoria de decisão de Bayes e projetadas com a rede NRBF, devido à similaridade matemática da saída dessa rede com as funções de saída do detetor [1], [2].

### 2. Modelo do Canal de Comunicações

A soma de vários componentes de sinal chegando ao receptor sem que haja uma componente principal e com diferentes atrasos e ângulos de fase aleatórios implica, de acordo com o teorema central do limite, em um processo estocástico gaussiano complexo de média nula, conhecido como desvanecimento Rayleigh. O canal pode ser aproximado, para um número finito  $N$  de percursos, por uma função  $h(t, \tau)$  da forma [3], [4], [5].

$$h(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta(t - \tau_k) e^{j2\pi\nu_k t}, \quad (1)$$

em que  $a_k$  são variáveis aleatórias complexas, estatisticamente independentes entre si, com média nula e variância unitária. As variáveis  $\tau_k$  e  $\nu_k$  modelam respectivamente o atraso e o deslocamento Doppler e têm fdp conjunta dada pela função de espalhamento do canal [6].

Para simular o efeito seletivo do canal é usado um filtro com resposta finita ao impulso (FIR) com  $n_a$  linhas de atraso. A cada linha de atraso é associado um coeficiente  $f_i$  de valor complexo que modela respectivamente a variação na amplitude e o deslocamento na fase do sinal transmitido. O sinal obtido em um instante de tempo  $k$ , na saída de um modelo de canal com essas características é dado por

$$\begin{aligned} r(k) &= \sum_{i=0}^{n_a-1} f_i s_{k-i} + n_k \\ &= \bar{r}(k) + n_k, \end{aligned} \quad (2)$$

em que  $\bar{r}(k)$  corresponde à parte seletiva em frequência do canal, que é modelada pelo filtro FIR e  $n_k$  é a amostra de ruído gaussiano complexo no instante  $k$ . Os símbolos de informação são dados por  $s_k$  e podem ser uma variante da constelação QPSK da forma

$$s_k^j = \begin{cases} s^{(1)} = 1 + i \\ s^{(2)} = 1 - i \\ s^{(3)} = -1 + i \\ s^{(4)} = -1 - i \end{cases}, \quad (3)$$

em que  $i = \sqrt{-1}$  e  $j = 1, 2, 3, 4$ . Com base nesse modelo de canal, pode-se analisar a estrutura dos dois tipos de detetor implementados com a rede NRBF.

### 3 Implementação do Detetor com a Rede NRBF

Nesta seção é analisada a aplicação da rede NRBF na implementação das variáveis de decisão bayesiana e serão mostradas curvas de taxa de erro de símbolos comparando as duas estruturas de detetor abordadas.

\*Os autores gostariam de expressar os agradecimentos à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro ao trabalho.

A rede NRBF é usada para implementar as variáveis de decisão devido à semelhança de sua resposta de saída com a expressão matemática das variáveis de decisão e por ser uma rede estruturalmente simples e fácil de implementar. Sua estrutura se ajusta apropriadamente ao papel de classificador que deve ser desempenhado pelas variáveis de decisão.

O problema consiste em se usar a informação contida no vetor estado do canal  $\bar{\mathbf{r}}$  para produzir uma estimativa  $\hat{s}(k-d)$  do símbolo de entrada do canal,  $s(k-d)$ , em que  $d$  é o atraso de decisão do detetor. Para obtenção da primeira estrutura considere a Fig. 1, em que está ilustrada a maneira como os símbolos trafegam pelo modelo de canal seletivo em frequência de memória  $n_a - 1$  e entram na linha transversal do detetor. Neste exemplo  $m = 3$ ,  $n_a = 2$  e  $d = 1$ , em que  $m$  é chamado ordem direta do detetor. Cada linha de atraso do canal é modelada pelos respectivos coeficientes  $a$  e  $b$ .

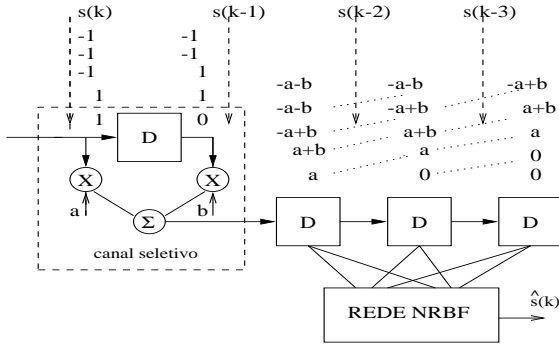


Figura 1: Processamento dos dados no detetor bayesiano.

Como se pode perceber na Fig. 1, os vetores de símbolos  $\mathbf{s}$  no instante  $k$  que influenciam na decisão do detetor têm comprimento  $m + n_a - 1$  e são da forma

$$\mathbf{s}(k) = [ s(k) \quad s(k-1) \quad \dots \quad s(k-m-n_a+2) ]$$

e o conjunto de símbolos visto pelo detetor corresponde à parte do vetor  $\mathbf{s}$  contida na linha de atraso do detetor. Esses símbolos são os estados do canal  $\bar{\mathbf{r}}$  livres de ruído aditivo. No caso de um sistema de comunicação que transmita símbolos da constelação QPSK, haverá  $n_s = 4^{n_a+m-1}$  possíveis combinações de símbolos no vetor  $\mathbf{s}(k)$  e conseqüentemente  $n_s$  vetores estado  $\bar{\mathbf{r}}(k)$  do canal. O conjunto  $R_{m,d}$  desses estados livres de ruído aditivo podem ser agrupados em quatro subconjuntos  $R_{m,d}^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq 4$  de modo que

$$R_{m,d} = \bigcup_{1 \leq i \leq 4} R_{m,d}^{(i)}, \quad (4)$$

em que  $R_{m,d}^{(i)}$  é formado por todos os  $n_s^{(i)} = n_s/4$  vetores estado  $\bar{\mathbf{r}}$  de tamanho  $m$  dado que o símbolo  $s(k-d) = s^{(i)}$ , ou seja

$$R_{m,d}^{(i)} = \{ \bar{\mathbf{r}}(k) | s(k-d) = s^{(i)} \}, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad (5)$$

em que os símbolos  $s^{(i)}$  são dados na Eq. 3.

Se  $\alpha_j^{(i)}$  são as probabilidades de que o  $j$ -ésimo vetor estado do  $i$ -ésimo subconjunto  $R_{m,d}^{(i)}$ ,  $\bar{\mathbf{r}}_j^{(i)}$ , tenha sido detectado, dado que o símbolo  $s(k-d) = s^{(i)}$  tenha sido enviado,  $\bar{\mathbf{r}}_j^{(i)} \in R_{m,d}^{(i)}$ , então a fdp do vetor  $\mathbf{r}(k)$  é, de acordo com a regra de Bayes, dado por

$$\eta^{(i)}(\mathbf{r}(k)) = \sum_{j=1}^{n_s^{(i)}} \alpha_j^{(i)} p(\mathbf{r}(k) - \bar{\mathbf{r}}_j^{(i)}), \quad 1 \leq i \leq 4, \quad (6)$$

em que  $n_s^{(i)}$  é o número de vetores-estado do subconjunto  $R_{m,d}^{(i)}$ ,  $\mathbf{r}(k) = \bar{\mathbf{r}}(k) + \mathbf{n}(k)$  e  $\mathbf{n}(k)$  é um vetor de amostras complexas de ruído gaussiano de média nula e com componentes estatisticamente independentes entre si. Para que o detetor minimize a probabilidade média de erro de detecção ele deve operar de acordo com a regra de decisão de Bayes [7], de modo que

$$\hat{s}(k-d) = s^{(i)} \quad \text{se} \quad \eta^{(i)}(\mathbf{r}(k)) = \max\{\eta^{(i)}(\mathbf{r}(k))\}. \quad (7)$$

Na Fig. 2 é mostrada a estrutura da rede NRBF de entradas seriais utilizada na simulação. Cada variável de decisão  $\eta^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , é da forma mostrada na Eq. 6, em que  $p(\cdot)$  é a fdp do ruído gaussiano, que corresponde às funções núcleo da rede NRBF. Cada variável de decisão recebe os vetores  $\bar{\mathbf{r}}_j^{(i)}$  pertencentes aos subconjuntos  $R_{m,d}^{(i)}$ .

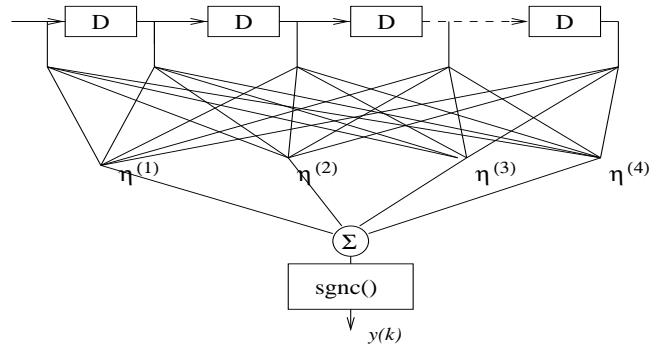


Figura 2: Estrutura da rede NRBF.

Para que a operação de maximização indicada na Eq. 7 seja realizada, a soma das quatro variáveis de decisão é aplicada à função  $\text{sgnc}(\cdot)$  de modo que a saída  $y(k)$  passa a ser dada por

$$y(k) = \text{sgnc} \left( \sum_{l=1}^4 \eta^{(l)}(\mathbf{r}(k)) \right), \quad (8)$$

em que  $\text{sgnc}(\cdot)$  é função sinal de valores complexos dada por

$$\text{sgnc}(y) = \begin{cases} 1 + j, & \text{Re}[y] \geq 0 \cap \text{Im}[y] \geq 0, \\ 1 - j, & \text{Re}[y] \geq 0 \cap \text{Im}[y] < 0, \\ -1 + j, & \text{Re}[y] < 0 \cap \text{Im}[y] \geq 0, \\ -1 - j, & \text{Re}[y] < 0 \cap \text{Im}[y] < 0. \end{cases} \quad (9)$$

A função de saída da rede,  $f(\mathbf{r}(k))$ , aplicada à função de decisão  $\text{sgnc}(\cdot)$  pode ainda ser escrita na forma

$$f(\mathbf{r}(k)) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{n_s^{(i)}} h^{(i)} \exp\left(\frac{-\|\mathbf{r}(k) - \bar{\mathbf{r}}_j^{(i)}(k)\|^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad (10)$$

em que os coeficientes  $h^{(i)}$  estão relacionados às probabilidades a priori  $\alpha_j^i$  e podem ser estabelecidos respectivamente iguais a  $h^{(1)} = 1 + j$ ,  $h^{(2)} = 1 - j$ ,  $h^{(3)} = -1 + j$  e  $h^{(4)} = -1 - j$ .

Uma desvantagem dessa forma de dispor os vetores estado  $\bar{\mathbf{r}}(k)$  no conjunto  $R_{m,d}$  é o número de estados que são necessários para o cálculo de cada uma das quatro variáveis de decisão. São necessários  $n_s^{(i)} = 4^{n_a+m-2}$  vetores, resultando em um maior custo computacional à medida que os parâmetros  $m$  e  $n_a$  aumentam. Uma forma de reduzir o número de estados necessários ao cálculo das variáveis de decisão é levando em consideração os vetores dos símbolos previamente detectados. Esses vetores têm tamanho  $n = n_a + m - 2 - d$  e  $n_f = 4^n$  possíveis combinações de símbolos de modo que os subconjuntos  $R_{m,d}^{(i)}$  passam a ser subdivididos na forma

$$R_{m,d}^{(i)} = \bigcup_{1 \leq j \leq n_f} R_{m,d,j}^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad (11)$$

em que  $R_{m,d,j}^{(i)}$  é o subconjunto formado por todos os vetores estado  $\bar{\mathbf{r}}(k)$  dado que  $s(k-d) = s^{(i)}$  e que  $\hat{\mathbf{s}}_f(k-d) = \mathbf{s}_{f,j}$ , em que a notação  $\mathbf{s}_{f,j}$  significa a  $j$ -ésima possível combinação do vetor  $\mathbf{s}_f$ . Matematicamente tem-se

$$R_{m,d,j}^{(i)} = \{\bar{\mathbf{r}}(k) | s(k-d) = s^{(i)} \cap \hat{\mathbf{s}}_f(k-d) = \mathbf{s}_{f,j}\}, \quad (12)$$

com  $1 \leq j \leq n_f$ . Desse modo, cada subconjunto  $R_{m,d,j}^{(i)}$  passa a conter somente  $n_{s,j}^{(i)} = \frac{n_s^{(i)}}{n_f} = 4^d$  estados ao invés de  $n_s^{(i)} = 4^{m+n_a-2}$ . Nesse segundo caso a fdp de  $\bar{\mathbf{r}}(k)$  dado que  $\hat{\mathbf{s}}_f(k-d) = \mathbf{s}_{f,j}$  é dada por

$$\eta_i(\bar{\mathbf{r}}(k) | \mathbf{s}_{f,j}) = \sum_{l=1}^{n_{s,j}^{(i)}} \alpha \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r}(k) - \bar{\mathbf{r}}_l^{(i)}\|^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad (13)$$

com  $1 \leq i \leq 4$  e  $\bar{\mathbf{r}}_l^{(i)} \in R_{m,d,j}^{(i)}$ . Do mesmo modo que na Eq. 7, a minimização da probabilidade de erro de detecção é obtida tomando-se

$$\hat{s}(k-d) = s^{(i)} \quad \text{se} \quad \eta^{(i)}(\mathbf{r}(k)) = \max\{\eta^{(i)}(\mathbf{r}(k))\}. \quad (14)$$

Embora nenhuma operação de filtragem tenha sido realizada, as estruturas implementadas com esse reagrupamento dos estados  $\bar{\mathbf{r}}(k)$  são chamadas de detetores bayesianos com retroação [8], [1], [2].

## 4 Simulação do Sistema

A simulação do sistema estudado, consistindo respectivamente de fonte de símbolos QPSK, canal e detetor foi feita considerando o desvanecimento lento. Os centros da rede foram treinados, paralelamente, usando-se o algoritmo LMS e calculando-se os estados do canal, vetores estado, passados para as funções de base radial da camada intermediária da rede NRBF. Na Fig. 3 é mostrado um diagrama ilustrando a estrutura do estimador do canal.

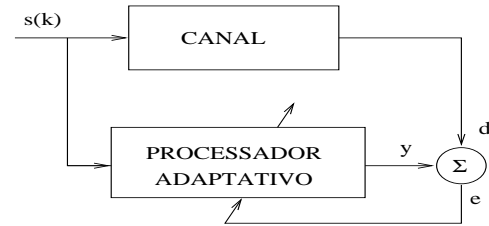


Figura 3: Diagrama usado para a estimação dos pesos do canal usando o algoritmo LMS.

Como pode ser visto na Fig. 3, os símbolos  $s(k)$  passam pelo canal, que é modelado por um filtro FIR tendo como coeficientes as amostras do processo estocástico  $h(t, \tau)$  mostrado na Eq. 1, e servem de referência para o ajuste dos coeficientes do processador adaptativo, que nada mais é do que um filtro FIR ajustado pelo algoritmo LMS [1], [9].

Nas Figs. 4 e 5 são mostradas as curvas de taxa de erro de símbolo para as duas estruturas de detetor: sem retroação e com retroação dos símbolos previamente estimados, para um atraso de decisão  $d = 1$  e respectivamente  $m = 2$  e  $m = 3$ .

Como se pode perceber, na Fig. 5 o detetor sem retroação é mais sensível às variações na frequência Doppler  $f_d$  do que a estrutura com retroação. Pode-se perceber que as taxas de erro têm praticamente o mesmo comportamento na estrutura com retroação.

Uma justificativa para esse resultado pode ser dada com base na distribuição geométrica dos estados do canal, organizados de acordo com as Eqs. 5 e 12. Essa distribuição dos estados do canal é que define as regiões de decisão do detetor que podem ser ilustradas na Fig. 6, obtida para um modelo de canal de coeficientes fixos, com uma função de transferência  $H(z)$  dada na Eq. 15, para uma estrutura de detetor sem retroação e com parâmetros  $n_a = 3$ ,  $d = 0$ ,  $m = 1$  e  $n = 2$ . O

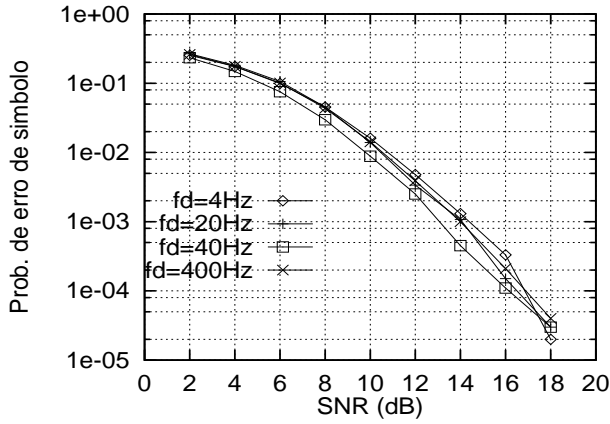


Figura 4: Taxa de erro de símbolos com retroação.

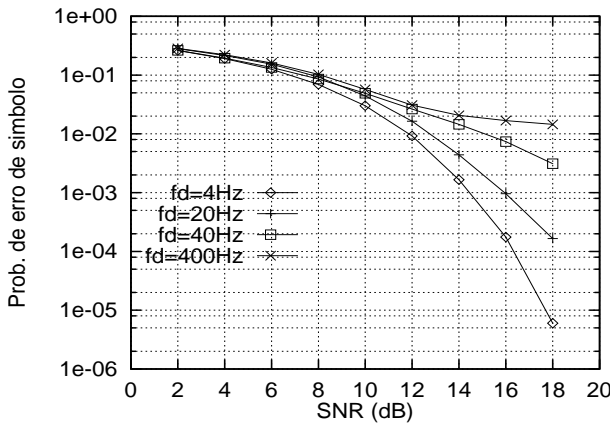


Figura 5: Taxa de erro de símbolo sem retroação.

parâmetro  $m = 1$  foi utilizado nesse exemplo, para permitir a visualização dessas regiões.

$$\begin{aligned}
 H(z) = & (0.7409 - j0.7406) + (-0.29648 \\
 & + j0.88884)z^{-1} + (-0.022191 \\
 & - j0.155562)z^{-2}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Como pode ser visto na Fig. 6, as quatro regiões de decisão representadas pelos quatro símbolos mostrados são mais complexas. Essa complexidade é que contribui para a ocorrência dos erros de decisão do detetor, principalmente nos modelos de canal com frequência Doppler elevada. Nesses casos os vetores de símbolos de entrada passados para as unidades intermediárias da rede NRBF sofrem um considerável desvio de fase, fazendo com que a variável de decisão bayesiana do detetor classifique erroneamente o símbolo estimado. Por outro lado, quando o retroação é utilizado, as regiões de decisão passam a ser mais simples e mais claras, como se pode ver na Fig. 7.

#### 4.1. Treinamento da rede

Existem duas formas de usar o LMS para estimar os estados do canal necessários ao detetor bayesiano [10]. A primeira forma, para canais com efeito Doppler rápido

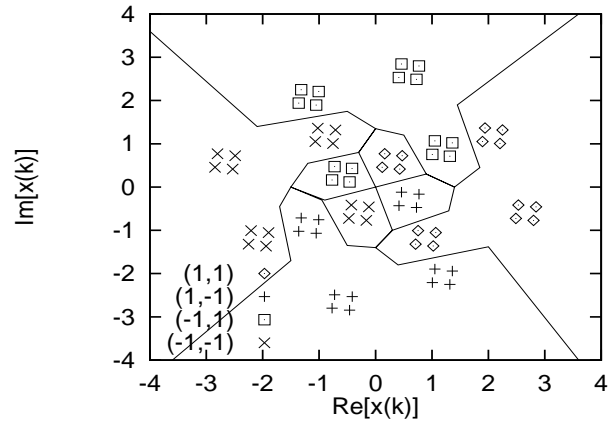


Figura 6: Distribuição dos estados do canal nas regiões de decisão sem retroação.

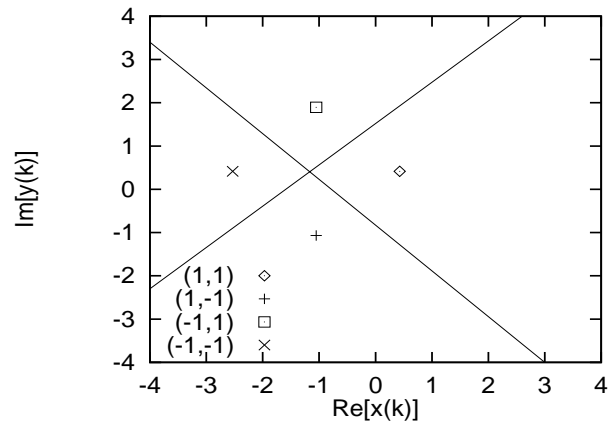


Figura 7: Distribuição dos estados do canal nas regiões de decisão com retroação e considerando-se um vetor de retroação  $\hat{\mathbf{s}}_f(k) = [1 + j \ 1 + j]^T$

em relação à taxa de transmissão, usa um vetor estimativa  $\hat{\mathbf{a}}$  definido como

$$\hat{\mathbf{a}}(k) = [ \hat{a}_0(k) \ \hat{a}_1(k) \ \dots \ \hat{a}_{n_a-1}(k) ]^T, \quad (16)$$

de modo que na amostra  $k$ ,

$$\begin{cases} \epsilon(k-d) = x(k-d) - \hat{\mathbf{a}}^T(k-d-1)\hat{\mathbf{s}}_a(k-d) \\ \hat{\mathbf{a}}(k-d) = \hat{\mathbf{a}}(k-d-1) + \mu\epsilon(k-d)\hat{\mathbf{s}}_a^*(k-d) \end{cases} \quad (17)$$

em que  $*$  denota a operação conjugado complexo,  $\mu$  é o parâmetro de ajuste dos valores de  $\hat{\mathbf{a}}$  e

$$\hat{\mathbf{s}}_a(k-d) = [ \hat{s}(k-d) \ \dots \ \hat{s}(k-d-n_a+1) ]^T. \quad (18)$$

No instante  $k$  o detetor deve usar a estimativa atrasada  $\hat{\mathbf{a}}(k-d)$  como se fosse a mais recente, para fazer a decisão, enquanto os coeficientes do canal podem ter mudado. Por isso é importante usar um atraso de decisão

$d$  tipicamente de ordem  $d = 1$  ou  $d = 2$  para minimizar o erro de rastreamento decorrente desse procedimento.

Uma outra maneira de usar o LMS na estimação do canal é verificando o seu comportamento para determinados valores pequenos de frequência Doppler. Ou seja, em determinados casos em que o canal é muito lento pode-se manter uma estimativa fixa durante um certo conjunto de símbolos enviados pela fonte. Esse procedimento para canais lentos diminui a necessidade da estimação contínua do canal e o esforço computacional do cálculo dos estados.

## 5. Conclusão

A implementação do detetor bayesiano com a rede NRBF é apropriada devido à semelhança da resposta da rede com as variáveis de decisão bayesiana. Como foi visto, a estrutura da rede NRBF é simples, fácil de treinar e, de acordo com a forma como os estados do canal são passados para as funções da camada intermediária, o poder de classificação do detetor tende a melhorar. Como se pode perceber na Fig. 6, haverá sempre um erro de classificação todas as vezes que, por exemplo, os valores de saída da rede caírem sobre as linha que separam as regiões de decisão. Enquanto isso, na Fig. 7, pode-se perceber que, devido à simplicidade das linhas que delimitam as novas regiões de decisão, esse tipo de erro de classificação é menor, pois a probabilidade de um valor de saída da rede cair sobre uma linha de delimitação tende a diminuir.

## Referências

- [1] S. McLaughlin, S. Chen and B. Mulgrew. Adaptive Bayesian Equalizer with Decision Feedback. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41:2918–2927, 1993.
- [2] B. Mulgrew. Applying Radial Basis Functions. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 50–64, 1996.
- [3] A. G. Guimarães, C. J. A. da Silva, J. F. Galdino e E. L. Pinto. Comparação de Desempenho de Simuladores de Canais com Desvanecimento Rápido Parte I- Avaliação Numérica. *Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, pages 426–430, 1997.
- [4] C. Loo and N. Secord. Computer Models for Fading Channels with Applications to Digital Transmission. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 40(4), November 1991.
- [5] Hirofumi and Suzuki. A Statistical Model for Urban Radio Propagation. *IEEE Transactions on Communications*, 25(7):673–680, 1997.
- [6] J. G. Proakis. *Digital Communications*. Mc Gra-Hill, Inc, 1995.
- [7] H. V. Poor. *An Introduction to Signal Detection and Estimation*. Springer-Verlag, 1988.
- [8] S. Haykin. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Macmillan publishing company, 1994.
- [9] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, 1996.
- [10] S. Chen, S. McLaughlin, B. Mulgrew and P. M. Grant. Adaptive Bayesian Decision Feedback Equalizer for Dispersive Mobile Radio Channels. *IEEE Transactions on Communications*, 43(5):1937–1946, May 1995.
- [11] J. R. Montalvão, J. C. M. Mota, B. Dorizzi and C. C. Calvalcante. Reducing Bayes Equalizer Complexity: A New Approach for Clusters Determination. *Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, pages 428–433, 1998.