

# Uma Estratégia de Decomposição Tchebycheff Transformada para Otimização Evolucionária Multiobjetivo

Lianny Sánchez López\* e Lucas S. Batista†

\*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais

†Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais

Laboratório de Pesquisa Operacional e Sistemas Complexos

Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

Emails: {liannysl,lusoba}@ufmg.br

**Resumo**—Algoritmos evolucionários (AEs) baseados em decomposição apresentam grande sucesso na otimização de problemas com duas ou três funções mérito e, nos últimos anos, esse potencial tem sido investigado também no contexto de problemas com muitos objetivos. Neste artigo, propõe-se uma estratégia de decomposição Tchebycheff ponderada transformada, a qual promove um controle simples, e independente de parâmetros, tanto da convergência quanto do espalhamento das alternativas aproximadas. Esta técnica é incorporada à estrutura do MOEA/D considerando-se um modelo sistemático para a geração, uniformemente distribuída, dos vetores referência. O desempenho da abordagem, frente a outras funções de decomposição populares, é avaliado a partir de problemas teste conhecidos, i.e., DTLZ1 a DTLZ4 com 3, 5, 8, 10 e 15 objetivos. Os resultados indicam uma forte competitividade da técnica sugerida, principalmente em relação à convergência das soluções estimadas.

**Palavras-chave**—MOEA/D, decomposição Tchebycheff, problemas de otimização com muitos objetivos, computação evolucionária.

## I. INTRODUÇÃO

Em otimização multiobjetivo (OMO), os problemas tratados envolvem funções mérito conflitantes, e a otimização simultânea das mesmas fornece um conjunto de alternativas que refletem diferentes relações de compromisso entre os critérios considerados [1]. Uma vez que obter esse conjunto completo e exato é uma tarefa difícil, e principalmente questionável do ponto de vista prático, frequentemente determina-se um conjunto finito e pequeno de alternativas que aproximem as soluções ótimas globais. Algoritmos evolucionários multiobjetivo (AEMOs) têm se mostrado adequados nesse sentido, particularmente para a resolução de problemas de otimização multiobjetivo (POMs) com dois ou três critérios [1]. Nos últimos anos, entretanto, pesquisas vêm apontando sérias dificuldades dessas abordagens para a otimização de problemas com muitos objetivos, i.e., com quatro ou mais funções mérito [2]–[4]. Como diferentes aplicações reais multiobjetivo pertencem a esse domínio [5], este artigo investiga uma estratégia promissora neste contexto.

Os principais desafios enfrentados em problemas de otimização com muitos objetivos (POMOs) incluem os seguintes aspectos [3], [4]: a) À medida que o número de objetivos aumenta, torna-se crescentemente difícil a comparação e discriminação entre as soluções, o que compromete severamente a pressão seletiva. b) A manutenção e promoção de

diversidade são dificultadas, resultando na convergência de AEMOs frequentemente para sub-regiões do conjunto solução de interesse. c) As alternativas tendem a apresentar-se muito distantes umas das outras, o que compromete a evolução de suas características. d) Algumas estruturas de dados, sub-rotinas e indicadores de qualidade empregados em OMO com dois ou três objetivos são impraticáveis em altas dimensões, devido ao aumento exponencial da complexidade computacional. e) A visualização das soluções estimadas não é trivial, dificultando o processo de tomada de decisão.

Com o intuito de contornar alguns dos desafios citados, diferentes abordagens foram investigadas e propostas nos últimos anos. Segundo a taxonomia apresentada em [4], tais métodos podem ser classificados em dois grupos: i) algoritmos baseados em relações de preferência alternativas [6]–[8], e ii) algoritmos que transformam o problema original com muitos objetivos em um problema relacionado. Algoritmos desta classe são baseados em funções de escalarização (decomposição [9], [10] ou agregação [11]), indicadores de qualidade [12], técnicas de redução de dimensão [13], ou estratégias de particionamento de espaço [14].

Neste artigo, os autores investigam uma função de escalarização para AEMOs baseados em decomposição. Essencialmente, propõe-se uma função Tchebycheff cujas ponderações são transformadas de forma a alcançar um melhor mapeamento das soluções aproximadas. Essa abordagem difere-se da decomposição Tchebycheff original em dois pontos: assegura a minimização do desvio de uma solução estimada em relação ao vetor ponderado usado; e possibilita um melhor controle sobre o espalhamento das alternativas estimadas, o que contribui diretamente para o processo de convergência. A técnica sugerida é comparada a outras decomposições populares na literatura quanto à capacidade de minimização de problemas da família DTLZ [15], envolvendo entre três e quinze funções objetivo. A análise dos resultados indica uma forte competitividade da técnica, particularmente em relação à convergência das soluções aproximadas.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma. A Seção II define formalmente o POM. A Seção III apresenta alguns fundamentos, caracterizando as principais funções de escalarização. A Seção IV descreve a abordagem proposta. A Seção V define o planejamento experimental e analisa os

resultados obtidos. Finalmente, a Seção VI conclui o trabalho.

## II. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO MULTI OBJETIVO

Sem qualquer perda de generalidade, um problema de otimização multiobjetivo (POM) pode ser definido como [16]:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})]^T \\ \text{sujeito a: } &\begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_g \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, n_h \\ \mathbf{x} \in \mathbb{X} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{X}$  é um vetor de variáveis de otimização;  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$  é o domínio de otimização, usualmente definido pelos limites inferior e superior das variáveis de decisão;  $\mathbf{f}(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  constituem  $m$  funções objetivo conflitantes;  $\mathbf{g}(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n_g}$  e  $\mathbf{h}(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n_h}$  representam respectivamente as restrições de desigualdade e igualdade do problema. Assim sendo, o conjunto de soluções factíveis é dado por  $\Omega \subseteq \mathbb{X}$ :

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \wedge h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall i, j\}$$

e sua imagem  $\mathbf{f}(\Omega)$  define o conjunto de vetores viáveis mapeado no espaço de objetivos.

Uma solução factível  $\mathbf{x}' \in \Omega$  domina outro ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$  se, e somente se,  $f_k(\mathbf{x}') \leq f_k(\mathbf{x})$  para todo  $k \in \{1, \dots, m\}$  e  $\exists k$  tal que  $f_k(\mathbf{x}') \neq f_k(\mathbf{x})$ .

Quando não existe  $\mathbf{x} \in \Omega$  que domine um vetor  $\mathbf{x}^*$ , esta solução é dita *Pareto-ótima*, e o conjunto de soluções eficientes pertencente a  $\Omega$  é nomeado *conjunto Pareto-ótimo*  $\mathcal{P}$ :

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x}^* \in \Omega \mid \nexists \mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\}. \quad (2)$$

A imagem desse conjunto no espaço de objetivos é chamada *fronteira Pareto-ótima*  $\mathcal{F}$ , definida como  $\mathbf{f}(\mathcal{P})$ , i.e.:

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{y}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \mid \mathbf{x}^* \in \mathcal{P}\}. \quad (3)$$

## III. CONCEITOS PRELIMINARES

MOEA/D (*Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition*) [10] é um método baseado em decomposição cuja ideia principal consiste em decompor um POM em um número finito de subproblemas de otimização mono-objetivo, os quais são otimizados simultaneamente por meio de funções escalares. Como a solução ótima de cada subproblema é também Pareto-ótima com relação ao POM considerado, espera-se que as estimativas encontradas para cada subproblema representem uma aproximação adequada de  $\mathcal{P}$ .

A estrutura do MOEA/D possibilita, em princípio, que qualquer técnica de escalarização empregada na otimização multiobjetivo clássica [16] seja usada para decompor um POM em um conjunto de subproblemas de otimização escalar. As estratégias mais populares são soma ponderada, Tchebycheff ponderada, e *boundary intersection*<sup>1</sup> [16].

<sup>1</sup>Alguns termos em inglês serão mantidos ao longo do texto para evitar uma tradução mal compreendida.

### A. Tchebycheff Ponderada

Assumindo  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$  um vetor ponderado, tal que  $\lambda_i \geq 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ , o problema de otimização escalar é definido como [16]:

$$\begin{aligned} \min f^{tch}(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}^*) &= \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i |f_i(\mathbf{x}) - z_i^*|\} \\ \text{sujeito a: } &\mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (4)$$

em que  $\mathbf{z}^* = (z_1^*, \dots, z_m^*)^T$  é um vetor objetivo de referência, tal que  $z_i^* < \min\{f_i(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Omega\}$  para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Alternativas eficientes do POM são encontradas ao considerar diferentes vetores ponderados  $\boldsymbol{\lambda}$ . Essa estratégia de agregação, ao contrário da soma ponderada, não é sensível à forma da fronteira Pareto, entretanto, promove a obtenção de soluções frequentemente distantes do vetor de referência empregado, o que dificulta o controle sobre a diversidade do conjunto de alternativas determinado. Essa limitação é discutida com mais detalhes adiante.

### B. Penalty-based Boundary Intersection (PBI)

A função de agregação PBI [10] é uma variação da técnica *boundary intersection* [17], e visa encontrar pontos de interseção entre vetores de referência e o limite mais inferior (no caso de problemas de minimização) da região viável mapeada no espaço de objetivos, i.e.,  $\mathbf{f}(\Omega)$ . O problema de otimização escalar definido para a técnica PBI é dado por:

$$\begin{aligned} \min f^{pbi}(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}^*) &= d_1 + \theta d_2 \\ \text{sujeito a: } &\mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (5)$$

$$d_1 = \|(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{z}^*)^T \boldsymbol{\lambda}\| / \|\boldsymbol{\lambda}\|$$

$$d_2 = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{z}^* + d_1 \bar{\boldsymbol{\lambda}})\|; \quad \bar{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} / \|\boldsymbol{\lambda}\|$$

onde  $\theta \geq 0$  é um parâmetro definido pelo usuário.

A Fig. 1 ilustra as medidas  $d_1$  e  $d_2$  com relação a um vetor objetivo  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  e um vetor ponderado  $\boldsymbol{\lambda}$ . Note que  $d_1$  possibilita avaliar a convergência de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  para a fronteira  $\mathcal{F}$ , enquanto  $d_2$  viabiliza um controle sobre a diversidade das soluções. Assim sendo, essa função de agregação permite ao usuário estabelecer um compromisso entre a convergência e a diversidade das soluções estimadas, por meio do ajuste *a priori* do fator de penalidade  $\theta$ , o qual influencia diretamente no desempenho da abordagem. O emprego da PBI é particularmente interessante nesse trabalho devido ao seu comportamento promissor em problemas com muitos objetivos [18].

## IV. FUNÇÃO DE ESCALARIZAÇÃO PROPOSTA

A técnica de decomposição proposta emprega uma função Tchebycheff ponderada transformada, definida como:

$$\begin{aligned} \min f^{tcht}(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\rho}, \mathbf{z}^*) &= \max_{1 \leq i \leq m} \{\rho_i |f_i(\mathbf{x}) - z_i^*|\} \\ \text{sujeito a: } &\mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (6)$$

em que

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{w} / \sum_{i=1}^m w_i \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = 1/\boldsymbol{\lambda}.$$

Note que o vetor de referência  $\boldsymbol{\lambda}$  é substituído pela normalização do seu inverso, i.e., por  $\boldsymbol{\rho}$ , e, como efeito, além

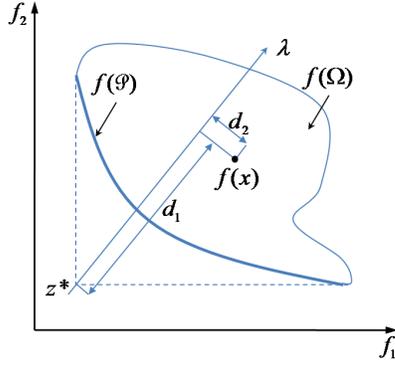


Fig. 1. Ilustração das medidas de distância,  $d_1$  e  $d_2$ , com relação a um vetor de referência arbitrário  $\lambda$  e um vetor objetivo  $f(x)$ .

de continuar assegurando a minimização do máximo desvio  $|f_i(\mathbf{x}) - z_i^*|$ ,  $i = 1, \dots, m$ , também promove a minimização da distância entre um vetor objetivo  $f(\mathbf{x})$  e um vetor ponderado  $\lambda$ . Dessa forma, essa estratégia desempenha um papel similar ao da abordagem PBI, porém sem a necessidade de se definir parâmetros adicionais.

#### A. Interpretação Geométrica

A Fig. 2 ilustra os contornos das funções escalares  $f^{tch}$ ,  $f^{tcht}$  e  $f^{pbi}$  considerando o vetor de referência  $\lambda = (0.7, 0.3)$ . A partir da Fig. 2(a), observa-se que o cone-negativo gerado pela função  $f^{tch}$  é deslocado em relação ao vetor ponderado, apresentando sua origem sobre esse vetor somente quando  $\lambda_i = 0.5$  para todo  $i = \{1, 2\}$ . Este fato dificulta o controle sobre a convergência e diversidade das soluções aproximadas, sendo mais crítico em problemas com muitos objetivos. Por outro lado, a função Tchebycheff transformada  $f^{tcht}$  reposiciona a origem do cone-negativo sobre o vetor de referência, para qualquer ponderação considerada (veja a Fig. 2(b)), contornando a dificuldade ressaltada. Vale destacar que a decomposição  $f^{pbi}$  converge para a função  $f^{tcht}$  quando  $\theta = 1.0$  e  $\lambda_i = \lambda \forall i$ , i.e., somente para ponderações idênticas. Para  $\theta > 1$  a função  $f^{pbi}$  possibilitará a estimação de soluções mais próximas ao vetor referência, entretanto, como a pressão seletiva será maior, i.e., o cone-negativo será mais fechado (Fig. 2(c)), poderá apresentar um desempenho degradado em problemas onde a promoção de diversidade é crítica.

#### B. Definição dos Vetores de Referência

Um conjunto de  $N$  vetores de referência  $\lambda^1, \dots, \lambda^N$  é gerado por meio de um método sistemático [17]. De forma geral,  $N = C_{m-1}^{H+m-1}$  pontos são distribuídos em um simplex  $m$ -dimensional, com um espaçamento uniforme  $\delta = 1/H$ , em que  $H > 0$  é o número de divisões consideradas ao longo de cada coordenada (objetivo).

A estratégia empregada cria  $k$  camadas de amostras a partir de diferentes valores de  $H$  ( $H < m$ ), similar ao mecanismo discutido em [19], [20]. Nesta abordagem, cada conjunto (camada)  $L_i = \{\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^{N_i}\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , é usado para compor o conjunto total de  $N = N_1 + \dots + N_k$  vetores

ponderados. Para promover diversidade, as coordenadas dos vetores gerados são deslocadas no interior do simplex via uma transformação simples. Essencialmente, supondo um vetor  $\lambda_i = (\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^m)$ ,  $i \in \{1, \dots, N_i\}$ , sua  $j$ -ésima coordenada é mapeada conforme:

$$\lambda_i^j = \tau_i \lambda_i^j + (1 - \tau_i)/m \quad (7)$$

em que  $j \in \{1, \dots, m\}$  e  $\tau_i \in [0, 1]$  é um fator de contração. Cada conjunto  $L_i$  deve estar associado a um fator  $\tau_i$ , em que  $\tau_i = 1$  mantém o sistema original de coordenadas e  $\tau_i \rightarrow 0$  implica uma contração máxima.

## V. RESULTADOS

### A. Problemas Teste

Os problemas DTLZ1 a DTLZ4 [15] têm sido frequentemente abordados na literatura no contexto de otimização com muitos objetivos [18], [21]. Neste trabalho estas instâncias são avaliadas considerando  $m \in \{3, 5, 8, 10, 15\}$ . O número de variáveis de decisão é definido como  $n = m + r - 1$ , em que  $r = 5$  para DTLZ1 e  $r = 10$  para DTLZ2-4 [15].

### B. Indicadores de Qualidade

1) *Inverted Generational Distance (IGD)*: O indicador de qualidade IGD [22] fornece uma medida de distância entre os pontos de uma amostra detalhada da fronteira Pareto-ótima ( $\mathcal{F}^*$ ) e as soluções estimadas ( $\mathcal{S}$ ) obtidas por um algoritmo. O valor IGD de um conjunto  $\mathcal{S}$  é dado por:

$$IGD(\mathcal{F}^*, \mathcal{S}) = \left( \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{F}^*} d(\mathbf{y}, \mathcal{S}) \right) / |\mathcal{F}^*| \quad (8)$$

em que  $d(\mathbf{y}, \mathcal{S})$  é a distância Euclideana entre um ponto  $\mathbf{y} \in \mathcal{F}^*$  e seu vizinho mais próximo em  $\mathcal{S}$ , e  $|\mathcal{F}^*|$  é a cardinalidade de  $\mathcal{F}^*$ . Assim, quanto menor o valor de IGD, melhor é a aproximação de  $\mathcal{S}$  em relação a  $\mathcal{F}^*$ .

Neste artigo, o conjunto  $\mathcal{F}^*$  é obtido considerando os  $N$  vetores ponderados e informações analíticas sobre os problemas DTLZ1-4 [15]. De forma geral, obtém-se as soluções ótimas que interceptam os vetores ponderados, logo  $|\mathcal{F}^*| = |\mathcal{S}|$ . As coordenadas de uma solução ótima para o problema DTLZ1, associada a um vetor ponderado  $\lambda$ , são dadas por [20]:

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0.5 \lambda_i / \sum_{j=1}^m \lambda_j, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

De maneira similar, para os problemas DTLZ2-4, tem-se [20]:

$$f_i(\mathbf{x}^*) = \lambda_i / \sqrt{\sum_{j=1}^m \lambda_j^2}, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

2) *Hypervolume (HV)*: O indicador de qualidade HV [23] calcula o hipervolume envolto pela fronteira de soluções estimadas  $\mathcal{S}$  e um ponto de referência  $\mathbf{y}_r$  dominado por todas as soluções de  $\mathcal{S}$ . Formalmente, esse indicador é descrito como a medida Lebesgue  $\Lambda$  da união dos hipercubos  $h_i$  definidos por um ponto não-dominado  $\mathbf{y}_i$  e  $\mathbf{y}_r$ :

$$HV(\mathcal{S}) = \Lambda \left( \left\{ \bigcup_i h_i \mid \mathbf{y}_i \in \mathcal{S} \right\} \right). \quad (9)$$

Supondo a minimização das funções de um POM, quanto maior o volume dominado, melhor a característica da

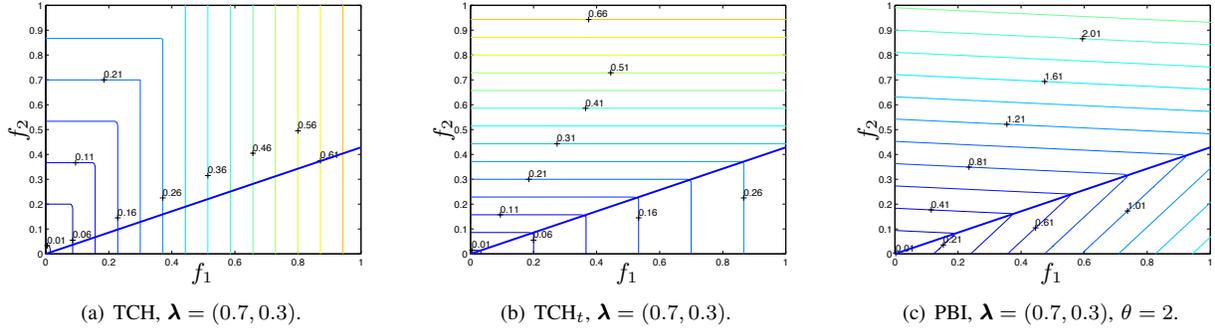


Fig. 2. Ilustração dos contornos das funções  $f^{tch}$ ,  $f^{tcht}$  e  $f^{pbi}$ , no domínio bi-dimensional, considerando um vetor referência  $\lambda = (0.7, 0.3)$ .

fronteira aproximada. Para o problema DTLZ1, usou-se  $\mathbf{y}_r = (1.0, \dots, 1.0)$ , e para DTLZ2-4 considerou-se  $\mathbf{y}_r = (2.0, \dots, 2.0)$ . O hipervolume exato foi calculado para  $m = 3$ , enquanto para  $m > 3$  obteve-se uma aproximação do hipervolume via simulação de Monte Carlo [12].

### C. Planejamento Experimental

Para avaliar o desempenho da função de decomposição proposta, a mesma é comparada com as escalarizações Tchebycheff padrão e PBI. Essas estratégias são incorporadas ao método MOEA/D [10], resultando nos algoritmos MOEA/D-tch, MOEA/D-pbi e MOEA/D-tch<sub>t</sub><sup>2</sup>.

Os operadores evolutivos do MOEA/D aplicado incluem a variação *DE/rand/1/bin* ( $F = 0.5$  e  $CR = 0.5$ ) seguida de uma mutação polinomial ( $p_m = 1/n$  e  $\eta_m = 20$ ) [10]. Os algoritmos são definidos com o mesmo tamanho de população  $N$ , de acordo com a instância testada (Tabela I); o tamanho da vizinhança é fixo, i.e.,  $T = 20$ ; o fator de penalidade da estratégia PBI é  $\theta = 5$  [10], [18]; e considera-se uma probabilidade  $\gamma = 0.1$  de que a seleção para variação envolva todos os vetores referência [24]. Por fim, os algoritmos foram executados 30 vezes em cada um dos problemas.

Para o cálculo aproximado do indicador HV são empregados 10,000 pontos na simulação de Monte Carlo [12].

### D. Análise dos Resultados

Inicialmente, avalia-se a capacidade das estratégias em estimar soluções que promovam a minimização das distâncias  $d_1$  e  $d_2$  (veja Fig. 1) em relação aos vetores ponderados gerados. A Fig. 3 apresenta gráficos em que as técnicas TCH<sub>t</sub>, TCH e PBI são comparadas considerando as médias das distâncias para todas as fronteiras estimadas. De maneira geral, a técnica TCH obteve o pior desempenho em todos os casos avaliados, o que é um resultado direto do efeito de deslocamento do cone-negativo em relação ao vetor de referência. Nessa situação, a medida  $d_2$  aumenta enquanto  $d_1$  diminui. Por outro lado, as estratégias TCH<sub>t</sub> e PBI foram capazes de aproximar adequadamente as medidas ótimas em praticamente todos os problemas. Embora não esteja evidente pelo gráfico, como a

TABLE I  
TAMANHO DA AMOSTRA  $H$  E TAMANHO DA POPULAÇÃO  $N$ .

$m$	Tamanho da amostra ( $H$ )	Tamanho da população ( $N$ )
3	$H = 12$	91
5	$H = 6$	210
8	$H_1 = 3, H_2 = 2$	156
10	$H_1 = 3, H_2 = 2$	275
15	$H_1 = 2, H_2 = 2, H_3 = 1$	255

Os fatores de contração para  $\mathbf{H} = (3, 2)$  são  $\boldsymbol{\tau} = (1.0, 0.5)$ , respectivamente, e para  $\mathbf{H} = (2, 2, 1)$  usou-se  $\boldsymbol{\tau} = (1.0, 0.8, 0.5)$ .

decomposição PBI exerce uma maior pressão seletiva, essa técnica alcançou em geral menores valores de  $d_2$ . Entretanto, essa mesma característica pode explicar sua maior dificuldade de convergência no problema DTLZ3.

A Tabela II apresenta os valores de IGD (melhor, médio e pior) calculados com base nas soluções de  $\mathcal{F}^*$ . Assim sendo, essa medida está diretamente relacionada aos valores médios de  $d_2$  encontrados na análise anterior e, conforme esperado, a abordagem PBI obteve os melhores resultados em um maior número de instâncias. A técnica TCH<sub>t</sub>, entretanto, superou a decomposição TCH em todos os casos, e encontrou em geral valores de IGD competitivos com aqueles estimados pela PBI.

Observa-se pela Tabela III que a decomposição TCH<sub>t</sub> dominou a técnica TCH em todos os testes e, além disso, apresentou muitos valores de HV competitivos ou melhores do que aqueles obtidos pela PBI. De fato, como a TCH<sub>t</sub> não aproximou tão bem as soluções ótimas pertencentes a  $\mathcal{F}^*$ , esse maior *espalhamento* das soluções estimadas pode ter contribuído para a determinação de maiores valores de HV. Ainda nesse sentido, é possível que a técnica TCH<sub>t</sub> consiga melhorar seu indicador IGD, caso um conjunto maior de soluções eficientes seja considerado em substituição a  $\mathcal{F}^*$ . Essa análise, entretanto, não é explorada neste trabalho.

Por fim, considerando a visualização da sobreposição de todas as 30 fronteiras estimadas pelos algoritmos, quando  $m \in \{3, 5, 8, 10, 15\}$ , ressalta-se que o MOEA/D-tch<sub>t</sub> aproximou a fronteira Pareto-ótima em todas as execuções realizadas, e para todos os problemas teste. Os métodos MOEA/D-tch e MOEA/D-pbi, no entanto, apresentaram falha de convergência, inclusive em problemas mais simples, com  $m = 3$ . Figuras ilustrativas não são apresentadas devido a limitação de espaço.

<sup>2</sup>Os algoritmos e indicadores de qualidade estão disponíveis em <http://www.ppgce.ufmg.br/~lusoba/files/cbic2015.zip>.

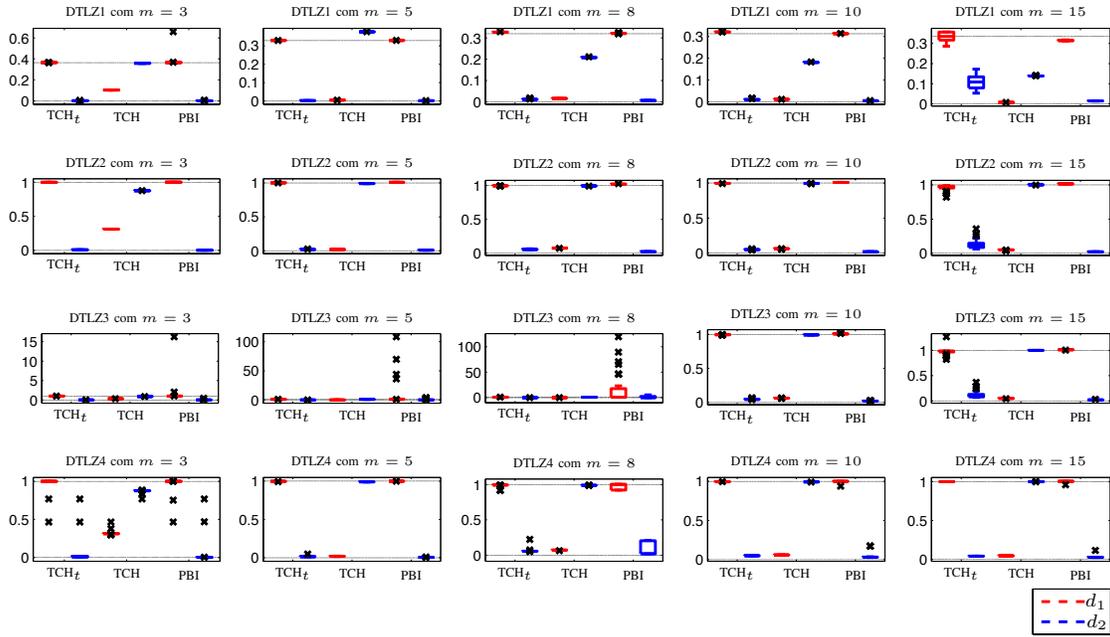


Fig. 3. Boxplot das medidas médias das distâncias  $d_1$  e  $d_2$  considerando todas as fronteiras estimadas e todas as instâncias testadas. Em cada problema, o valor ótimo de  $d_1$  deve tender à curva pontilhada superior (definida em 0.3643, 0.3288, 0.3201, 0.3131 e 0.3358 para o problema DTLZ1 com  $m \in \{3, 5, 8, 10, 15\}$ , respectivamente, e definida em 1.0 para os problemas DTLZ2–4), e o valor ótimo de  $d_2$  deve tender à zero (curva pontilhada inferior).

## VI. CONCLUSÕES

Neste artigo propôs-se uma função de escalarização Tchebycheff transformada para otimização de problemas com muitos objetivos no contexto de AEs baseados em decomposição. A estratégia apresentada aplica uma transformação sobre a função Tchebycheff padrão, possibilitando um melhor controle sobre a convergência e diversidade das soluções aproximadas.

O desempenho da decomposição proposta foi comparado ao das técnicas Tchebycheff padrão e PBI nos problemas DTLZ1–4, assumindo  $m \in \{3, 5, 8, 10, 15\}$ . Os resultados obtidos sugerem uma forte competitividade entre  $TCH_t$  e PBI, em que a primeira destaca-se por não depender de parâmetros adicionais e, principalmente, por ter apresentado valores promissores de HV e uma taxa de convergência de 100% para a fronteira Pareto-ótima, em todos os problemas testados. A estratégia  $TCH_t$  desempenha uma pressão seletiva relaxada em relação a PBI com  $\theta > 1.0$ , e embora esse fato tenha comprometido a convergência das estimativas para os pontos de  $\mathcal{F}^*$ , possivelmente contribuiu para uma maior promoção de diversidade entre as soluções obtidas. Além disso, a abordagem sugerida dominou a técnica Tchebycheff original em todas as situações analisadas, justificando assim sua aplicação em AEs baseados em funções de decomposição.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi apoiado pelo Programa Doutores Recém-Contratados (PRPq/UFGM), e pelas agências nacionais de fomento: CNPq, FAPEMIG, e CAPES.

## REFERÊNCIAS

- [1] C. A. Coello Coello, G. B. Lamont, and D. A. van Veldhuizen, *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*, 2nd ed. New York: Springer, 2007.
- [2] R. C. Purshouse and P. J. Fleming, “On the evolutionary optimization of many conflicting objectives,” *IEEE Transactions On Evolutionary Computation*, vol. 11, no. 6, pp. 770–784, 2007.
- [3] H. Ishibuchi, N. Tsukamoto, and Y. Nojima, “Evolutionary many-objective optimization: A short review,” in *Proc. of CEC*, Hong Kong, 2008, pp. 2419–2426.
- [4] C. von Lucken, B. Barán, and C. Brizuela, “A survey on multi-objective evolutionary algorithms for many-objective problems,” *Computational Optimization and Applications*, vol. 58, no. 3, pp. 707–756, 2014.
- [5] P. J. Fleming, R. C. Purshouse, and R. J. Lygoe, “Many-objective optimization: An engineering design perspective,” in *Proc. of EMO*, ser. LNCS. Guanajuato, Mexico: Springer, 2005, pp. 14–32.
- [6] M. Farina and P. Amato, “On the optimal solution definition for many-criteria optimization problems,” in *Proceedings of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)*, 2002, pp. 233–238.
- [7] H. Sato, H. E. Aguirre, and K. Tanaka, “Pareto partial dominance MOEA and hybrid archiving strategy included CDAS in many-objective optimization,” in *Proc. of CEC*, Barcelona, 2010, pp. 1–8.
- [8] L. S. Batista, F. Campelo, F. G. Guimarães, and J. A. Ramírez, “A comparison of dominance criteria in many-objective optimization problems,” in *Proc. of CEC*, New Orleans, LA, 2011, pp. 2359–2366.
- [9] E. J. Hughes, “MSOPS-II: A general-purpose many-objective optimiser,” in *Proc. of CEC*, Singapore, 2007, pp. 3944–3951.
- [10] Q. Zhang and H. Li, “MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition,” *IEEE Transactions On Evolutionary Computation*, vol. 11, no. 6, pp. 712–731, 2007.
- [11] T. Murata and A. Taki, “Many-objective optimization for knapsack problems using correlation-based weighted sum approach,” in *Proc. of EMO*, ser. LNCS, vol. 5467, Nantes, France, 2009, pp. 468–480.
- [12] J. Bader and E. Zitzler, “HyPE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization,” *Evolutionary Computation*, vol. 19, no. 1, pp. 45–76, 2011.

TABLE II

VALORES DE IGD (MELHOR, MÉDIO, PIOR). AS MEDIDAS EM **NEGRITO** SUGEREM O MÉTODO QUE ALCANÇOU O MELHOR DESEMPENHO.

DTLZ	Obj. (MaxGen)	MOEA/D-tch <sub>t</sub>	MOEA/D-tch	MOEA/D-pbi
1	3 (400)	(8.013e-04 <b>1.240e-03</b> <b>2.813e-03</b> )	(3.253e-02 3.288e-02 3.335e-02)	<b>(5.125e-04</b> 6.939e-03 1.738e-01)
	5 (600)	(1.168e-03 1.615e-03 <b>1.991e-03</b> )	(1.123e-01 1.125e-01 1.129e-01)	<b>(7.340e-04</b> <b>1.275e-03</b> 2.508e-03)
	8 (750)	(1.155e-02 1.371e-02 2.002e-02)	(2.178e-01 2.228e-01 2.263e-01)	<b>(6.041e-03</b> <b>7.486e-03</b> <b>1.026e-02</b> )
	10 (1000)	(1.071e-02 1.292e-02 1.888e-02)	(2.366e-01 2.407e-01 2.435e-01)	<b>(4.884e-03</b> <b>5.394e-03</b> <b>6.390e-03</b> )
	15 (1500)	(3.102e-02 9.206e-02 1.727e-01)	(2.943e-01 2.994e-01 3.014e-01)	<b>(2.489e-02</b> <b>2.726e-02</b> <b>2.955e-02</b> )
2	3 (250)	(6.839e-03 9.122e-03 1.083e-02)	(7.316e-02 7.489e-02 7.652e-02)	<b>(3.533e-03</b> <b>4.169e-03</b> <b>4.799e-03</b> )
	5 (350)	(1.676e-02 1.968e-02 2.629e-02)	(2.928e-01 2.944e-01 2.971e-01)	<b>(1.169e-02</b> <b>1.394e-02</b> <b>1.551e-02</b> )
	8 (500)	(5.212e-02 5.681e-02 6.434e-02)	(6.735e-01 7.461e-01 7.692e-01)	<b>(2.929e-02</b> <b>3.230e-02</b> <b>3.791e-02</b> )
	10 (750)	(4.504e-02 4.944e-02 5.742e-02)	(7.573e-01 8.421e-01 8.597e-01)	<b>(2.018e-02</b> <b>2.223e-02</b> <b>2.411e-02</b> )
	15 (1000)	(4.370e-02 9.522e-02 3.694e-01)	(1.022e+00 1.045e+00 1.091e+00)	<b>(2.783e-02</b> <b>2.956e-02</b> <b>3.180e-02</b> )
3	3 (1000)	(4.126e-03 <b>5.600e-03</b> <b>7.728e-03</b> )	(7.440e-02 7.540e-02 7.619e-02)	<b>(2.421e-03</b> 4.351e-01 1.175e+01)
	5 (1000)	(1.071e-02 <b>1.387e-02</b> <b>1.773e-02</b> )	(2.931e-01 2.945e-01 2.954e-01)	<b>(9.410e-03</b> 5.187e+00 7.065e+01)
	8 (1000)	(5.041e-02 <b>5.813e-02</b> <b>7.498e-02</b> )	(7.076e-01 7.398e-01 7.633e-01)	<b>(3.385e-02</b> 1.081e+01 8.290e+01)
	10 (1500)	(4.104e-02 4.653e-02 6.724e-02)	(8.069e-01 8.472e-01 8.605e-01)	<b>(1.881e-02</b> <b>2.324e-02</b> <b>3.990e-02</b> )
	15 (2000)	(4.213e-02 8.628e-02 3.914e-01)	(1.012e+00 1.048e+00 1.082e+00)	<b>(2.341e-02</b> <b>2.531e-02</b> <b>3.207e-02</b> )
4	3 (600)	(5.686e-03 1.999e-01 <b>9.503e-01</b> )	(7.294e-02 1.925e-01 <b>9.503e-01</b> )	<b>(1.854e-03</b> <b>8.328e-02</b> <b>9.503e-01</b> )
	5 (1000)	(8.966e-03 1.504e-02 4.699e-02)	(2.932e-01 2.953e-01 2.975e-01)	<b>(3.496e-03</b> <b>4.320e-03</b> <b>5.891e-03</b> )
	8 (1250)	(5.236e-02 <b>7.010e-02</b> 2.431e-01)	(7.105e-01 7.589e-01 7.877e-01)	<b>(1.957e-02</b> 9.438e-02 <b>2.264e-01</b> )
	10 (2000)	(4.801e-02 4.997e-02 <b>5.200e-02</b> )	(8.319e-01 8.572e-01 8.983e-01)	<b>(2.844e-02</b> <b>4.703e-02</b> 1.867e-01)
	15 (3000)	(4.135e-02 4.213e-02 <b>4.286e-02</b> )	(1.020e+00 1.056e+00 1.085e+00)	<b>(2.694e-02</b> <b>3.830e-02</b> 1.266e-01)

TABLE III

VALORES DE HV (MELHOR, MÉDIO, PIOR). AS MEDIDAS EM **NEGRITO** SUGEREM O MÉTODO QUE ALCANÇOU O MELHOR DESEMPENHO.

DTLZ	Obj. (MaxGen)	MOEA/D-tch <sub>t</sub>	MOEA/D-tch	MOEA/D-pbi
1	3 (400)	<b>(9.737e-01</b> <b>9.736e-01</b> <b>9.735e-01</b> )	(9.677e-01 9.675e-01 9.673e-01)	(9.736e-01 9.699e-01 8.641e-01)
	5 (600)	(9.994e-01 <b>9.990e-01</b> 9.983e-01)	(9.980e-01 9.970e-01 9.961e-01)	<b>(9.995e-01</b> 9.989e-01 <b>9.985e-01</b> )
	8 (750)	<b>(1.000e+00</b> <b>1.000e+00</b> <b>9.999e-01</b> )	(9.967e-01 9.958e-01 9.945e-01)	<b>(1.000e+00</b> <b>1.000e+00</b> 9.998e-01)
	10 (1000)	<b>(1.000e+00</b> <b>1.000e+00</b> <b>1.000e+00</b> )	(9.973e-01 9.964e-01 9.947e-01)	<b>(1.000e+00</b> <b>1.000e+00</b> <b>1.000e+00</b> )
	15 (1500)	<b>(1.000e+00</b> <b>1.000e+00</b> <b>9.999e-01</b> )	(9.872e-01 9.832e-01 9.799e-01)	<b>(1.000e+00</b> <b>1.000e+00</b> <b>9.999e-01</b> )
2	3 (400)	<b>(7.413e+00</b> <b>7.413e+00</b> <b>7.412e+00</b> )	(7.375e+00 7.372e+00 7.369e+00)	(7.411e+00 7.410e+00 7.409e+00)
	5 (600)	<b>(3.176e+01</b> <b>3.169e+01</b> <b>3.165e+01</b> )	(3.159e+01 3.152e+01 3.142e+01)	(3.175e+01 <b>3.169e+01</b> 3.162e+01)
	8 (750)	<b>(2.560e+02</b> <b>2.558e+02</b> 2.556e+02)	(2.443e+02 2.363e+02 2.347e+02)	(2.559e+02 <b>2.558e+02</b> <b>2.557e+02</b> )
	10 (1000)	<b>(1.024e+03</b> <b>1.024e+03</b> <b>1.024e+03</b> )	(9.699e+02 9.257e+02 9.157e+02)	<b>(1.024e+03</b> <b>1.024e+03</b> <b>1.024e+03</b> )
	15 (1500)	<b>(3.277e+04</b> <b>3.277e+04</b> <b>3.277e+04</b> )	(2.755e+04 2.266e+04 2.157e+04)	<b>(3.277e+04</b> <b>3.277e+04</b> <b>3.277e+04</b> )
3	3 (400)	<b>(7.414e+00</b> <b>7.413e+00</b> <b>7.413e+00</b> )	(7.373e+00 7.370e+00 7.369e+00)	(7.413e+00 4.711e+00 0)
	5 (600)	<b>(3.173e+01</b> <b>3.170e+01</b> <b>3.165e+01</b> )	(3.161e+01 3.152e+01 3.143e+01)	(3.172e+01 2.743e+01 0)
	8 (750)	<b>(2.559e+02</b> <b>2.558e+02</b> <b>2.557e+02</b> )	(2.382e+02 2.361e+02 2.341e+02)	<b>(2.559e+02</b> 1.758e+02 0)
	10 (1000)	<b>(1.024e+03</b> <b>1.024e+03</b> <b>1.024e+03</b> )	(9.330e+02 9.213e+02 9.140e+02)	<b>(1.024e+03</b> <b>1.024e+03</b> <b>1.024e+03</b> )
	15 (1500)	<b>(3.277e+04</b> <b>3.277e+04</b> <b>3.276e+04</b> )	(2.427e+04 2.239e+04 2.140e+04)	<b>(3.277e+04</b> <b>3.277e+04</b> <b>3.276e+04</b> )
4	3 (400)	<b>(7.414e+00</b> 6.777e+00 <b>4.000e+00</b> )	(7.380e+00 6.972e+00 <b>4.000e+00</b> )	(7.413e+00 <b>7.152e+00</b> <b>4.000e+00</b> )
	5 (600)	<b>(3.176e+01</b> <b>3.170e+01</b> <b>3.165e+01</b> )	(3.158e+01 3.153e+01 3.147e+01)	(3.175e+01 3.169e+01 3.163e+01)
	8 (750)	<b>(2.560e+02</b> <b>2.559e+02</b> <b>2.556e+02</b> )	(2.441e+02 2.377e+02 2.352e+02)	(2.559e+02 2.558e+02 2.554e+02)
	10 (1000)	<b>(1.024e+03</b> <b>1.024e+03</b> <b>1.024e+03</b> )	(9.401e+02 9.270e+02 9.147e+02)	<b>(1.024e+03</b> <b>1.024e+03</b> <b>1.024e+03</b> )
	15 (1500)	<b>(3.277e+04</b> <b>3.277e+04</b> 3.276e+04)	(2.467e+04 2.318e+04 2.192e+04)	<b>(3.277e+04</b> <b>3.277e+04</b> <b>3.277e+04</b> )

- [13] D. K. Saxena, J. A. Duro, A. Tiwari, and K. Deb, "Objective reduction in many-objective optimization: Linear and nonlinear algorithms," *IEEE Trans. Evol. Comput.*, vol. 17, no. 1, pp. 77–99, 2013.
- [14] H. Aguirre and K. Tanaka, "Many-objective optimization by space partitioning and adaptive  $\epsilon$ -ranking on MNK-landscapes," in *Proc. of EMO*, ser. LNCS, vol. 5467, Nantes, France, 2009, pp. 407–422.
- [15] K. Deb, L. Thiele, M. Laumanns, and E. Zitzler, "Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization," in *Evolutionary Multiobjective Optimization*, ser. Adv. Info. Know. Proc., A. Abraham, L. Jain, and R. Goldberg, Eds. Springer London, 2005, pp. 105–145.
- [16] K. Miettinen, *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [17] I. Das and J. E. Dennis, "Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems," *SIAM Journal of Opt.*, vol. 8, no. 3, pp. 631–657, 1998.
- [18] K. Deb and H. Jain, "An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, Part I: Solving problems with box constraints," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 18, no. 4, pp. 577–601, 2014.
- [19] H. Liu, F. Gu, and Q. Zhang, "Decomposition of a multiobjective optimization problem into a number of simple multiobjective subproblems," *IEEE Trans. Evol. Comput.*, vol. 18, no. 3, pp. 450–455, 2014.
- [20] K. Li, K. Deb, Q. Zhang, and S. Kwong, "An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition," *IEEE Transactions On Evolutionary Computation*, pp. 1–23, 2014.
- [21] Y. Tan, Y. Jiao, H. Li, and X. Wang, "MOEA/D + uniform design: A new version of MOEA/D for optimization problems with many objectives," *Computers & Operations Research*, vol. 40, no. 6, pp. 1648–1660, 2013.
- [22] E. Zitzler, L. Thiele, M. Laumanns, C. Fonseca, and V. Fonseca, "Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review," *IEEE Trans. Evol. Comput.*, vol. 7, no. 2, pp. 117–132, 2003.
- [23] E. Zitzler and L. Thiele, "Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 3, no. 4, pp. 257–271, 1999.
- [24] H. Li and Q. Zhang, "Multiobjective optimization problems with complicated Pareto sets, MOEA/D and NSGA-II," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 13, no. 2, pp. 284–302, 2009.