

# Caos em tempo discreto: introdução, exemplos e representação estatística

**Marcio Eisencraft**

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

marcioft@usp.br

**Resumo** – No presente texto revisitam-se alguns aspectos de sinais caóticos gerados por sistemas de tempo discreto ou mapas. Em particular, destaca-se o emprego de técnicas comumente utilizadas para sinais aleatórios na sua caracterização. Para tanto, inicia-se com uma breve revisão das principais definições e propriedades dos sinais caóticos de tempo discreto, exemplificando-se também diversos mapas capazes de gerá-los. A seguir, as técnicas e conceitos apresentados são utilizados na dedução das características temporais e espectrais de sinais gerados por alguns mapas lineares por partes. Por fim, sugerem-se temas de pesquisa futuros.

**Palavras-chave** – Sistemas dinâmicos, processamento de sinais, sistemas não lineares, teoria do caos, comunicações.

**Abstract** – This paper reviews some aspects of chaotic signals generated by discrete-time systems or maps. In particular, we highlight the use of techniques commonly used for random signals in their characterization. To do so, we begin with a brief review of the main definitions and properties of discrete-time chaotic signals, exemplifying several maps capable of generating them. Next, the presented techniques and concepts are used to deduce the temporal and spectral characteristics of signals generated by some piecewise linear maps. Finally, future research topics are suggested.

**Keywords** – Dynamic systems, signal processing, nonlinear systems, chaos theory, communications.

## 1. INTRODUÇÃO

De forma simplificada, pode-se dizer que um sinal caótico é limitado em amplitude, aperiódico e apresenta Dependência Sensível com as Condições Iniciais (DSCI) [1]. Essa última propriedade significa que se o sistema que o gerou for iniciado com uma condição ligeiramente diferente, o sinal obtido pode apresentar valores completamente distintos do sinal anterior em curto período de tempo [1].

Em Comunicações e Processamento de Sinais, as pesquisas envolvendo aplicações de sinais caóticos têm início no começo da década de 1990 após os trabalhos seminiais [2, 3]. Desde então, as possibilidades de aplicação da Teoria do Caos nessas áreas vêm aumentando, indo desde modulações analógicas e digitais até criptografia, geração de sequências pseudoaleatórias, marcas d'água e muitas outras (veja, por exemplo, [4–12]). Além disso, mostrou-se que modelos de diversos dispositivos usados em processamento de sinais como equalizadores cegos e redes de *phase-locked loops* podem apresentar comportamento caótico [13–17].

Especificamente em Telecomunicações, as propostas giram em torno de se transmitir informação digital codificada em um sinal caótico. Dessa forma, cada símbolo é transmitido por uma forma de onda única, diferentemente do que acontece nos sistemas de comunicação digital usuais, em que a cada símbolo da constelação atribui-se uma forma de onda. Essa abordagem não permite, em princípio, utilizar os receptores ótimos baseados em filtros casados [18]. Assim, em um canal não dispersivo, esperam-se taxas de erro de bit mais altas do que as encontradas em sistemas convencionais. Essa desvantagem pode eventualmente ser compensada por um incremento na segurança [19] e pelo fato dos sinais caóticos serem de banda larga em geral, o que implica em propriedades típicas dos sistemas de espalhamento espectral [7].

Apesar de ser necessário muita pesquisa para tornar esses sistemas efetivamente competitivos, as primeiras implementações práticas vêm surgindo nos últimos anos. Por exemplo, um grupo de pesquisadores do Laboratório de Comunicações Óticas da Universidade de Atenas, na Grécia, implementou recentemente um enlace de 120 km de fibras óticas na região metropolitana de Atenas transmitindo na faixa de gigabits por segundo usando portadoras caóticas. O trabalho foi publicado no prestigiado periódico *Nature* [19, 20]. Recentemente diversos sistemas de comunicação baseados em caos foram patenteados por grandes empresas. Veja por exemplo [21, 22].

Tendo essa situação em mente, vem-se estudando o desempenho de sistemas de comunicação baseados em caos em situações realistas e formas de aperfeiçoá-los de modo a atingirem comportamentos aceitáveis em aplicações práticas. Um dos aspectos mais relevantes nessa linha é obter expressões exatas para Densidade Espectral de Potência (DEP) e faixa de frequências ocupada por esses sinais. Muitos trabalhos citam “banda larga” como uma propriedade dos sinais caóticos [7, 23]. No entanto, essa caracterização está longe do que é necessário em sistemas de comunicação práticos. Como os canais físicos são sempre de banda limitada, é necessário conhecer exatamente qual a largura de banda ocupada por um sinal caótico transmitido e, preferencialmente, ser capaz de controlá-la. Dessa forma, essa lacuna precisa ser preenchida para viabilizar o emprego prático desses sistemas.

No presente texto, revisitam-se alguns resultados analíticos relacionados à DEP desses sinais [24–27]. A ideia básica é empregar para sinais caóticos o arcabouço utilizado usualmente para tratar sinais aleatórios, seguindo a visão da reconhecida obra de A. Lasota and M. MacKey, *Probabilistic properties of deterministic systems* [28].

Para tornar o texto acessível a uma audiência mais ampla e ilustrar efetivamente as técnicas descritas, na Seção 2 são apresentadas definições e notações básicas relacionadas a sistemas dinâmicos em tempo discreto. Também são apresentados alguns mapas Geradores de Sinais Caóticos (GSC). A seguir, na Seção 3 discutem-se resultados relacionados à caracterização espectral dos sinais caóticos. Por fim, na Seção 4 colocam-se algumas conclusões e propõe-se ideias de trabalhos futuros.

## 2 SINAIS CAÓTICOS DE TEMPO DISCRETO: NOTAÇÃO E DEFINIÇÕES BÁSICAS

Nesta seção definem-se e comentam-se os principais conceitos relacionados a sistemas dinâmicos não lineares de tempo discreto necessários para as discussões nas seções subsequentes. O texto apresentado é inspirado principalmente em trechos da dissertação de mestrado [29] e da tese de doutorado [30] do autor, com as devidas atualizações e padronização de notação.

Na Seção 2.1 define-se a notação utilizada na representação de mapas e sinais. A seguir, na Seção 2.2, são apresentados os conceitos de DSCI e expoentes de Lyapunov. A partir deles, na Seção 2.3, formaliza-se a definição de sinais caóticos e na Seção 2.4 exemplificam-se alguns GSCs. Por fim, na Seção 2.5 expõem-se os conceitos de densidade invariante e operador de Frobenius-Perron, introduzindo-se a abordagem estatística para sinais caóticos.

### 2.1 Conceitos e definições básicos

Um sistema dinâmico é um conjunto de possíveis estados com uma regra determinista que define o estado presente em função dos anteriores. Neste texto trata-se em particular dos sistemas dinâmicos de tempo discreto, definidos a seguir.

**Definição 1** Seja  $f(\cdot)$  uma função cujo espaço de partida  $U \subset \mathbb{R}^M$  (domínio) é igual ao espaço de chegada (contradomínio). A equação de diferenças

$$s(n+1) = f(s(n)), \quad (1)$$

com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s(0) = s_0 \in U$ , representa um *sistema dinâmico de tempo discreto* ou *mapa*.

**Definição 2** A *órbita* ou *sinal* correspondente a  $s_0$  gerado a partir de  $f(\cdot)$  e  $s_0$  fixo é a função  $s(n) = f^n(s_0)$ , em que  $f^k(\cdot)$  representa a  $k$ -ésima aplicação sucessiva de  $f(\cdot)$  e  $f^0(s_0) = s_0$ . O ponto  $s_0$  é chamado de *condição inicial* de  $s(n)$ . Quando for importante destacar a condição inicial  $s_0$  de um sinal, ele será indicado por  $s(n; s_0)$ .

**Definição 3** A *trajetória* da órbita  $s(n; s_0)$  de  $f(\cdot)$  é o conjunto

$$S_{s_0} = \{s(n; s_0), n \in \mathbb{N}\}. \quad (2)$$

**Definição 4** Um ponto  $c$  é dito *ponto fixo* do mapa ou de  $f(\cdot)$  se  $f(c) = c$  e, portanto,  $s(n; c) = c, \forall n \in \mathbb{N}$ .

A periodicidade e a estabilidade de órbitas periódicas são importantes no estudo de sinais caóticos, pois a ausência de período é uma das principais características desses sinais. Assim, definem-se a seguir periodicidade, estabilidade e conceitos relacionados.

**Definição 5** Seja o mapa (1) e  $p$  um ponto do domínio de  $f(\cdot)$ . O ponto  $p$  é dito *eventualmente periódico* de período  $k > 0$  se para algum  $n_* \in \mathbb{N}$ ,  $f^{n+k}(p) = f^n(p)$  para todo  $n \geq n_*$  e  $k$  é o menor natural que satisfaz essa condição. A órbita  $s(n; p)$  é dita *eventualmente periódica* de período  $k$ . No caso em que  $n_* = 0$ ,  $p$  é dito *periódico* e  $s(n; p)$  é *periódica* de período  $k$ .

**Definição 6** Seja o mapa (1), com  $f(\cdot)$  contínua e diferenciável. Uma órbita  $s(n; a)$  é dita *assintoticamente periódica* se convergir para uma órbita periódica quando  $n \rightarrow \infty$ ; ou seja, existe uma órbita periódica  $s(n; p)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s(n; a) - s(n; p)\| = 0$ . O ponto  $a$  é dito *assintoticamente periódico*. Uma órbita (respectivamente, ponto) não assintoticamente periódica (periódico) é chamada de *aperiódica* (*aperiódico*).

**Definição 7** Um ponto fixo  $c$  de (1) é:

1. *atrator* se existe  $\delta > 0$  tal que, para qualquer órbita  $s(n; s_0)$  com  $\|s_0 - c\| < \delta$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(n; s_0) = c$ ;
2. *estável segundo Lyapunov* se, dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que se  $\|s_0 - c\| < \delta$  então  $\|s(n; s_0) - c\| < \varepsilon$  para todo  $n \geq 0$ ;
3. *assintoticamente estável* se é atrator e estável segundo Lyapunov;
4. *instável* se não é atrator e nem estável segundo Lyapunov.

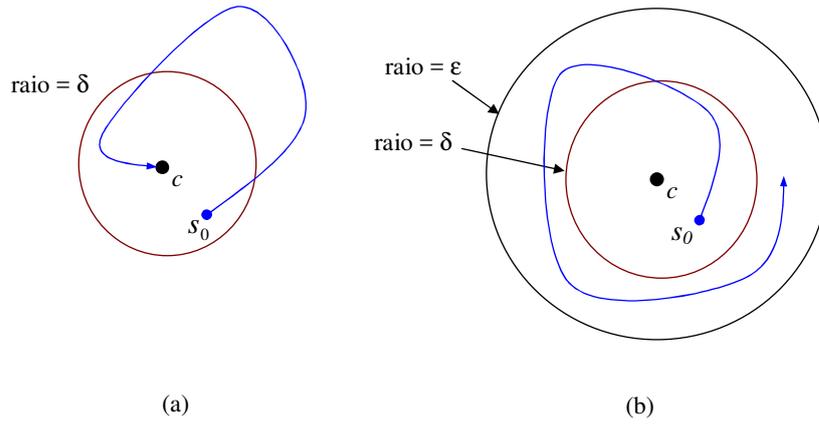


Figura 1: Diagrama esquemático do comportamento de uma órbita próxima (a) de um ponto fixo atrator (b) de um ponto fixo estável segundo Lyapunov.

As trajetórias que se iniciam próximas de um atrator podem sair de suas proximidades a curto prazo, porém, devem aproximar-se dele a longo prazo. As trajetórias que se iniciam próximas de um ponto fixo estável segundo Lyapunov devem permanecer nas proximidades desse ponto para todo  $n \geq 0$ , não convergindo, necessariamente, para ele. Essas situações são mostradas de forma esquemática nas Figuras 1(a) e (b). As trajetórias próximas de um ponto fixo assintoticamente estável além de convergirem para ele, permanecem o tempo todo numa vizinhança dele.

Se uma órbita  $s(n; p)$  é periódica de período  $k$  para o mapa (1),  $p$  é um ponto fixo do mapa  $s(n+1) = f^k(s(n))$ . Assim, a análise da estabilidade da órbita periódica  $s(n; p)$  é feita por meio da análise da estabilidade do ponto fixo  $p$  do sistema  $s(n+1) = f^k(s(n))$ .

O conjunto limite de uma órbita é o conjunto de pontos cuja vizinhança é frequentemente visitada por ela. Formalmente, tem-se a definição a seguir.

**Definição 8** O conjunto limite da órbita  $s(n; s_0)$  de  $f(\cdot)$  é dado por

$$\Omega(s_0) = \{s / \forall \{n_*, \varepsilon\}, \exists n > n_*, \|f^n(s_0) - s\| < \varepsilon\}. \quad (3)$$

Se  $\Omega(s_0)$  é o conjunto limite de um órbita e  $r_0$  é uma outra condição inicial, então diz-se que a órbita  $s(n; r_0)$  (ou o ponto  $r_0$ ) é atraído para  $\Omega(s_0)$  se  $\Omega(r_0) \subset \Omega(s_0)$ .

Pontos de uma órbita podem ou não estar contidos em seu conjunto limite. O conjunto limite pode não ter nenhum ponto em comum com a órbita, como no caso do conjunto limite de uma órbita convergindo assintoticamente para um ponto fixo atrator. Nesse caso, o conjunto limite é um único ponto, o ponto fixo atrator. A órbita é atraída para esse ponto fixo.

**Definição 9** Um atrator é um conjunto limite que atrai um conjunto de condições iniciais de medida não nula. Esse conjunto de condições iniciais é chamado de *bacia de atração*.

Um conjunto  $A \subset B$  é denso em  $B$  se arbitrariamente próximo de cada ponto de  $B$  existe um ponto de  $A$ . Em outras palavras, para cada  $s_*$  em  $B$  e cada  $\varepsilon > 0$ , a vizinhança  $\{s \in U / \|s_* - s\| < \varepsilon\}$  contém um ponto de  $A$ .

## 2.2 Número e expoente de Lyapunov

Um conceito fundamental para o estudo de sinais caóticos é a DSCI definida a seguir [1].

**Definição 10** Seja (1) um mapa em  $U \subset \mathbb{R}^M$ . Um ponto  $s_0 \in U$  tem DSCI se existe uma distância euclidiana não nula  $\varepsilon$  tal que pelo menos algum ponto arbitrariamente próximo de  $s_0$  é eventualmente mapeado a pelo menos  $\varepsilon$  unidades da imagem correspondente a  $s_0$ . Mais precisamente, existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para qualquer  $\delta > 0$ , a bola aberta de raio  $\delta$  centrada em  $s_0$ ,  $\{s \in U / \|s - s_0\| < \delta\}$ , contém pelo menos um ponto  $s_*$  tal que  $\|f^{n_*}(s_*) - f^{n_*}(s_0)\| \geq \varepsilon$  para algum  $n_* \in \mathbb{N}$ . Nessas condições, a órbita  $s(n; s_0)$  apresenta DSCI.

Valendo-se apenas dessa definição, é difícil verificar essa propriedade para uma dada órbita, exceto em casos excepcionais.

A seguir definem-se os expoentes de Lyapunov que representam taxas de divergência exponencial média entre duas órbitas suficientemente próximas e que possibilitam a verificação da DSCI de forma operacional. Daí a importância do estudo de sua definição e de métodos numéricos para o seu cálculo. Inicia-se com o caso unidimensional e, a seguir, passa-se ao caso  $M$ -dimensional.

### 2.2.1 Caso unidimensional

O comportamento das órbitas do mapa unidimensional de tempo discreto

$$s(n+1) = f(s(n)), \quad (4)$$

nas proximidades de um ponto fixo é fortemente influenciado pela derivada de  $f(\cdot)$  nesse ponto, supondo que ela exista. Por exemplo, se  $c$  é um ponto fixo de  $f(\cdot)$  e o módulo da derivada nesse ponto obedece  $|f'(c)| = \ell > 1$ , então toda órbita  $s(n; s_0)$  com  $s_0$  suficientemente próximo de  $c$  afasta-se de  $c$  com uma *taxa multiplicativa de aproximadamente  $\ell$  por iteração*, até mover-se para longe de  $c$ . Isto pode ser visto pela expansão em série de Taylor de  $f(s_0)$  em torno de  $c$ :

$$\begin{aligned} f(s_0) &\approx f(c) + f'(c)(s_0 - c) \Rightarrow f(s_0) - f(c) \approx f'(c)(s_0 - c) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(s_0) - c| \approx \ell |s_0 - c|. \end{aligned} \quad (5)$$

Para um ponto periódico  $p$  de período  $k$ , essa informação pode ser obtida olhando-se a derivada da  $k$ -ésima iteração de  $f(\cdot)$  já que  $p$  é ponto fixo de  $f^k(\cdot)$ . Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} f^{k'}(p) &= f'(f^{k-1}(p)) \cdot f'(f^{k-2}(p)) \cdot f'(f^{k-3}(p)) \cdot \dots \cdot f'(p) \Rightarrow \\ f^{k'}(p) &= \prod_{n=0}^{k-1} f'(s(n; p)), \end{aligned} \quad (6)$$

ou seja,  $f^{k'}(p)$  é o produto das derivadas de  $f(\cdot)$  calculadas nos  $k$  pontos distintos de  $S_p$ . Suponha que o módulo desse produto seja  $\ell > 1$ . Pelo mesmo raciocínio utilizado para pontos fixos, uma órbita com condição inicial próxima de  $p$  separa-se de  $s(n; p)$  a uma taxa de aproximadamente  $\ell$  depois de  $k$  iterações. Faz sentido então descrever a *taxa multiplicativa média de separação por iteração entre as duas órbitas como sendo  $L = (\ell)^{1/k}$* .

O número de Lyapunov generaliza as taxas obtidas acima para o caso em que os pontos não são necessariamente periódicos.

**Definição 11** Seja o mapa unidimensional (4). Se  $f(\cdot)$  for diferenciável nos pontos da trajetória da órbita  $s(n; s_0)$ , o seu *número de Lyapunov* é

$$L(s_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \prod_{n=0}^{N-1} |f'(s(n))| \right)^{1/N} \quad (7)$$

se o limite existir. O *expoente de Lyapunov*  $h(s_0)$  é definido como

$$h(s_0) = \ln(L(s_0)), \quad (8)$$

se  $L(s_0)$  existir.

Segue da definição que o número de Lyapunov de um ponto fixo  $c$  do mapa (4) é  $|f'(c)|$  e o expoente de Lyapunov de um ponto periódico  $s_0 = p$  de período  $k$  desse mesmo mapa é

$$h(p) = \frac{\sum_{n=0}^{k-1} \ln |f'(s(n; p))|}{k}. \quad (9)$$

A Definição 11 permite algumas considerações sobre estabilidade:

- um ponto fixo ou uma órbita periódica que tenha expoente de Lyapunov negativo será assintoticamente estável pelo argumento apresentado em (5), já que nesse caso  $\ell < 1$ ;
- também de (5), conclui-se que expoente de Lyapunov positivo indica que o ponto fixo ou a órbita periódica é instável, pois nesse caso  $\ell > 1$ .

Esses fatos são relevantes por causa do seguinte teorema, cuja demonstração é apresentada em [1]:

**Teorema 1** Seja o mapa (4). Se a órbita  $s(n; s_0)$  satisfaz  $f'(s(n)) \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e é assintoticamente periódica tendo como limite a órbita periódica  $s(n; p)$ , então as duas órbitas têm expoentes de Lyapunov idênticos, assumindo que ambos estejam definidos.

Conclui-se assim que se uma órbita limitada possui expoente de Lyapunov positivo ela não pode ser assintoticamente periódica tendo como limite uma órbita periódica assintoticamente estável ou convergir para um ponto fixo assintoticamente estável. Assim, restam duas possibilidades para esse tipo de órbita

- ou ela é assintoticamente periódica convergindo para uma órbita periódica instável, caso pouco provável em geral; ou
- ela é *aperiódica*.

Essa conclusão é fundamental para a classificação de uma órbita como “caótica”, como será visto na Seção 2.3.

É comum um mapa ter um único atrator estável que atrai quase todas<sup>1</sup> as condições iniciais. Nesse caso, quase todas as órbitas terão mesmo expoente de Lyapunov  $h$  que é igual ao de uma órbita que se inicia dentro do atrator. Para esses mapas, toma-se a liberdade de escrever que  $h$  é o *expoente de Lyapunov do mapa*, como é usual na literatura.

Finalmente, outro conceito que é conveniente definir neste ponto é o de *mapas conjugados*. O número de Lyapunov é simples de ser calculado, por exemplo, para sinais gerados por mapas lineares por partes, já que esses apresentam derivada constante em cada trecho. Porém para mapas mais genéricos, a determinação desse número e das propriedades associadas a ele tornam-se mais difíceis. A conjugação permite deduzir propriedades das órbitas de um mapa a partir da “pareceça” dele com outro eventualmente mais simples.

**Definição 12** Seja  $C(\cdot)$  um mapa contínuo e injetor. Os mapas  $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  são *conjugados* se eles estão relacionados por uma mudança de coordenadas  $C(\cdot)$  tal que  $C \circ f(\cdot) = g \circ C(\cdot)$ . A notação  $C \circ f(\cdot)$  significa  $C(f(\cdot))$  e  $C(\cdot)$  é chamado de *mapa de conjugação*.

O mapa  $C(\cdot)$  indica uma correspondência entre pontos dos mapas  $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$ . O seguinte teorema, demonstrado em [1] resume a relevância da conjugação no estudo de sistemas dinâmicos não lineares.

**Teorema 2** Considere os mapas  $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  conjugados por  $C(\cdot)$ . Pode-se afirmar que:

1. se  $p$  é um ponto periódico de período  $k$  de  $f(\cdot)$ , então  $C(p)$  é um ponto periódico de período  $k$  de  $g(\cdot)$ ;
2. se a derivada de  $C(\cdot)$  é não nula em todos os pontos da órbita  $s(n; s_0)$  de  $f(\cdot)$  então existe uma órbita correspondente  $C(s(n; s_0))$  de  $g(\cdot)$  com mesmo número de Lyapunov.

Esse teorema expressa que dados dois mapas conjugados, a cada órbita de um corresponde uma órbita do outro com mesmo período e mesmo número de Lyapunov.

### 2.2.2 Caso $M$ -dimensional

Em sistemas discretos  $M$ -dimensionais, a cada órbita estão associados  $M$  expoentes de Lyapunov.

Seja o mapa (1) com  $f : U \subset \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$  diferenciável e seja  $J_k = Df^k(s_0)$  o jacobiano de  $f^k(\cdot)$  calculado em  $s_0$ . Para  $m = 1, 2, \dots, M$ , seja  $r_k^{(m)}$  o comprimento do  $m$ -ésimo maior semieixo do elipsoide  $J_k E(s_0)$  para uma órbita com condição inicial  $s_0$  em que  $E(s_0)$  é uma hipersfera de raio unitário centrada em  $s_0$ . A notação  $J_k E(s_0)$  representa o produto dos versores que descrevem a hipersfera  $E(s_0)$  pelo jacobiano  $J_k$ . Então  $r_k^{(m)}$  mede a contração ou expansão próximo à órbita de  $s_0$  durante as primeiras  $k$  iterações na direção do  $m$ -ésimo maior eixo do elipsoide  $J_k E$ , que é representada pelo versor  $u_k^{(m)}$ .

A Figura 2 ilustra esses conceitos no caso bidimensional.

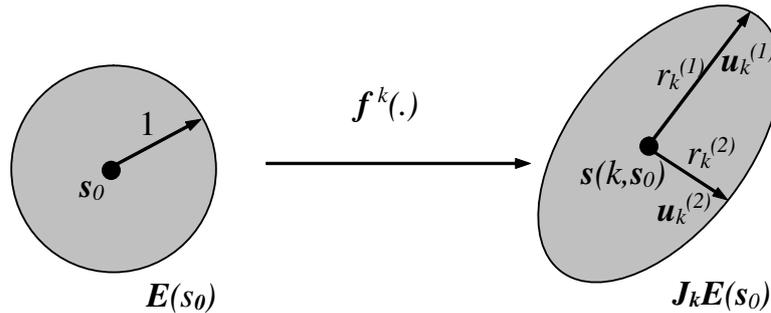


Figura 2: Evolução de uma esfera centrada na condição inicial  $s_0$  quando submetida ao mapa (1), com  $f(\cdot)$  diferenciável. Caso bidimensional.

**Definição 13** O  $m$ -ésimo número de Lyapunov,  $m = 1, 2, \dots, M$ , de  $s(n; s_0)$  é dado por

$$L^{(m)}(s_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( r_k^{(m)} \right)^{1/k}, \quad (10)$$

se o limite existir. Nesse caso, o  $m$ -ésimo expoente de Lyapunov de  $s(n; s_0)$  é  $h^{(m)}(s_0) = \ln L^{(m)}(s_0)$ .

<sup>1</sup>O termo *quase toda(o)s* neste texto é usado no sentido de que existe apenas um conjunto de medida nula que não satisfaz a propriedade.

Note que a definição assegura que, para uma certa órbita, os números e expoentes de Lyapunov obedecem  $L^{(1)}(s_0) \geq L^{(2)}(s_0) \geq \dots \geq L^{(M)}(s_0)$  e  $h^{(1)}(s_0) \geq h^{(2)}(s_0) \geq \dots \geq h^{(M)}(s_0)$ , respectivamente.

Pode-se demonstrar [1] que todas as considerações feitas no caso unidimensional continuam válidas para o caso multidimensional, inclusive o Teorema 1 e as observações que o seguem, devendo-se considerar nas análises o sinal do maior expoente de Lyapunov  $h^{(1)}(s_0)$  da órbita. Ou seja, a existência de um único expoente de Lyapunov positivo já impede a órbita de convergir para um ponto fixo atrator ou para uma órbita periódica atratora.

No restante do texto, para facilidade de notação, o maior expoente de Lyapunov de uma órbita  $h^{(1)}(s_0)$  será denotado por  $h(s_0)$ . Quando o mapa tem um único atrator que atrai quase todas as órbitas, representa-se os expoentes de Lyapunov do atrator simplesmente por  $h^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , que são ditos *expoentes de Lyapunov do mapa*, como é usual na literatura.

Existem diversas técnicas para o cálculo numérico dos expoentes de Lyapunov para os sinais gerados por um dado mapa. Pode-se citar a clássica abordagem do mapa tangente (veja, por exemplo, [1, p. 199-203]) e a das dinâmicas clonadas, recentemente proposto em [31].

### 2.3 Sinais caóticos

A definição de sinais *caóticos* utilizada aqui é a introduzida por [32] na forma como foi expressa em [1].

**Definição 14** Um sinal limitado em amplitude é *caótico* se é aperiódico e apresenta DSCI.

Uma órbita com DSCI, pela própria Definição 10, é instável já que é sempre possível encontrar um ponto arbitrariamente próximo de sua condição inicial cuja órbita relacionada está distante após algumas iterações. É exatamente aí que reside a “imprevisibilidade” característica dos GSCs. Como, numa situação prática, muitas vezes não se sabe com toda a precisão a condição inicial de uma órbita, é impossível prever o valor assumido pelo sinal gerado após certo tempo (conhecido como *tempo de horizonte*) dependente da incerteza na condição inicial.

Como foi visto, os expoentes de Lyapunov funcionam como uma quantificação da DSCI. O seguinte teorema garante esse fato [1].

**Teorema 3** Suponha que um sinal  $s(n; s_0)$  tenha maior número de Lyapunov  $L(s_0)$  e maior expoente de Lyapunov  $h(s_0)$ . Esse sinal apresentará DSCI se  $L(s_0) > 1$  ou  $h(s_0) > 0$ .

Esse teorema é bastante intuitivo considerando-se que os expoentes de Lyapunov medem a divergência exponencial de órbitas próximas. Como existem algoritmos disponíveis para o cálculo numérico dos expoentes de Lyapunov [1, 31], tem-se uma forma quantitativa para se determinar se uma órbita apresenta DSCI. Desse teorema, segue que

**Corolário 1** Um sinal  $s(n; s_0)$  limitado em amplitude, aperiódico e satisfazendo  $h(s_0) > 0$  é caótico.

A determinação da periodicidade ou não de um sinal não é simples. É usual tomar-se a condição  $h(s_0) > 0$  como “suficiente” para considerar um sinal como caótico na literatura focada em aplicações. Essa escolha é numericamente justificável pelo fato de que apenas sinais periódicos instáveis possuem  $h(s_0) > 0$ , como visto na Seção 2.2. Esses sinais têm, em geral, probabilidade nula de serem obtidas num experimento numérico.

Outra definição usual na literatura é a de *atrator caótico* [1].

**Definição 15** Seja o sistema dinâmico  $s(n+1) = f(s(n))$  e um sinal caótico  $s(n; s_0)$  gerado por esse sistema. O conjunto  $\Omega(s_0)$  dessa órbita é chamado de *conjunto caótico* se  $s_0 \in \Omega(s_0)$ . Um *atrator caótico* é um conjunto caótico que também é um atrator.

Em outras palavras, um conjunto caótico é o conjunto limite de uma órbita caótica que está contida no seu conjunto limite. A exigência de que a órbita caótica esteja contida no seu próprio conjunto limite garante que o conjunto caótico tenha uma órbita densa e que, portanto, seja irredutível.

### 2.4 Alguns geradores de sinais caóticos

Nesta seção apresentam-se alguns mapas utilizados que podem ser utilizados como GSCs. Inicia-se com mapas unidimensionais, incluindo-se os mapas tenda, tenda inclinada e quadrático. Em seguida, passa-se a mapas multidimensionais, especificamente os mapas de Hénon, de Ikeda e uma versão tridimensional do mapa de Hénon.

#### 2.4.1 Mapa tenda $f_T(\cdot)$

O mapa tenda unidimensional é dado por

$$f_T(s) = 1 - 2|s|, \quad (11)$$

definindo o sistema dinâmico

$$s(n+1) = f_T(s(n)), \quad (12)$$

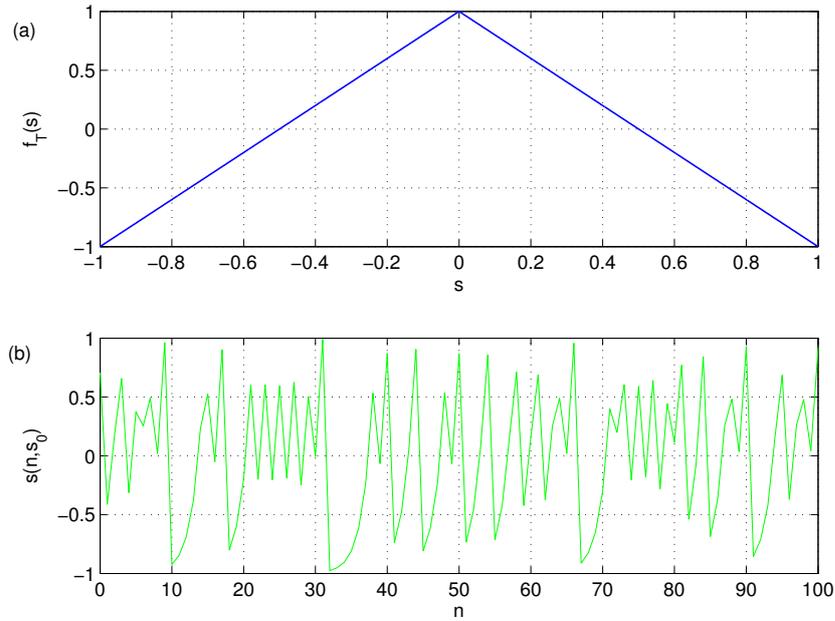


Figura 3: (a) Mapa tenda  $f_T(s)$ ; (b) órbita com condição inicial  $s_0 = \sqrt{2}/2$ .

com condição inicial  $s(0) = s_0 \in U = [-1, 1]$ . Na Figura 3 mostram-se um gráfico de  $f_T(s)$  e uma órbita gerada a partir de (12).

Para  $s \neq 0$ ,  $|f'_T(s)| = 2$  e portanto  $L(s_0) = 2$  e  $h(s_0) = \ln 2$  para todas as órbitas com condição inicial  $s_0$  cuja trajetória não inclua  $s = 0$ . O fato de que  $h > 0$  implica no provável aparecimento de órbitas caóticas nesse sistema. Na verdade, utilizando-se a teoria de dinâmica simbólica, pode-se mostrar que existe uma quantidade não enumerável de condições iniciais que geram órbitas caóticas para esse mapa, sendo seu atrator caótico o intervalo  $U$  [33].

É importante ressaltar que, para qualquer condição inicial  $s_0$  racional, a órbita  $s(n; s_0)$  converge para o ponto fixo  $c = -1$ . Assim, o comportamento caótico das órbitas desse mapa não pode ser observado em simulações computacionais por meio de iterações de (12). Para simular a utilização de condições iniciais irracionais pode-se utilizar a abordagem de sistemas lineares alimentados por entradas aleatórias descrita em [34].

### 2.4.2 Mapa tenda inclinada $f_I(\cdot)$

O mapa tenda inclinada é definido por

$$s(n+1) = f_I(s(n)) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha+1}s(n) + \frac{1-\alpha}{\alpha+1}, & -1 \leq s(n) < \alpha \\ \frac{2}{\alpha-1}s(n) - \frac{\alpha+1}{\alpha-1}, & \alpha \leq s(n) \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

com parâmetro  $-1 < \alpha < 1$  e  $s(0) = s_0 \in U = [-1, 1]$ . Um gráfico de  $f_I(\cdot)$  para  $\alpha = 0,8$  é mostrado na Figura 4(a) e a órbita  $s(n; 0)$  na Figura 4(b).

O número de Lyapunov  $L(s_0)$  para quase todas as órbitas  $s(n; s_0)$  é a média geométrica do módulo da derivada dos dois trechos lineares do mapa, ponderada pelo comprimento de cada um dos segmentos [35]. Assim, o expoente de Lyapunov de quase todas as órbitas de  $f_I(\cdot)$  é

$$h_I = \frac{1+\alpha}{2} \ln \left( \frac{2}{1+\alpha} \right) + \frac{1-\alpha}{2} \ln \left( \frac{2}{1-\alpha} \right). \quad (14)$$

Na Figura 4(c) mostra-se a variação de  $h_I$  com  $\alpha$ . Observa-se que, para os valores de  $\alpha$  admissíveis  $h_I > 0$  e, portanto, os sinais aperiódicos gerados são caóticos. O valor máximo é  $h_{I_{max}} = \ln 2$  e ocorre para  $\alpha = 0$ , que corresponde ao mapa tenda  $f_T(\cdot)$  (11).

Um resultado interessante proveniente da teoria da dinâmica simbólica [1] é que para qualquer  $-1 < \alpha < 1$ ,  $f_I(\cdot)$  apresenta órbitas caóticas densas em  $U$  sendo esse seu atrator caótico.

### 2.4.3 Mapa de Bernoulli com $r$ segmentos $f_B(\cdot)$

Seja  $r$  um inteiro com  $r \geq 2$  e  $-1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r = 1$  uma partição do intervalo  $U = [-1, 1]$ . O mapa de Bernoulli com  $r$  segmentos  $f_B : [-1, 1[ \rightarrow [-1, 1[$  é definido por

$$s(n+1) = f_B(s(n)) = \frac{2}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} s(n) - \frac{\alpha_j + \alpha_{j-1}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}, \text{ para } s(n) \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]. \quad (15)$$

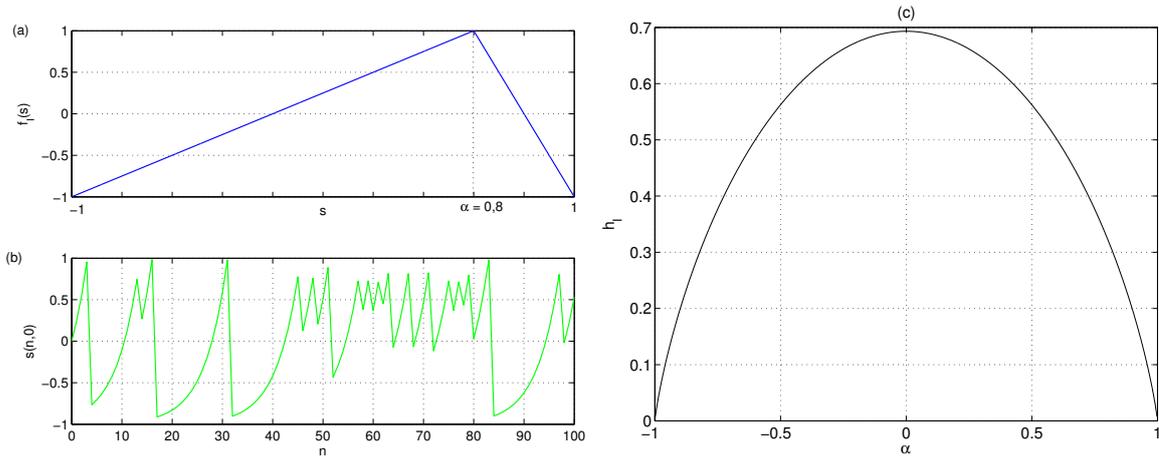


Figura 4: (a) Mapa tenda inclinada  $f_I(\cdot)$ ; (b) trecho da órbita  $s(n; 0)$  para  $\alpha = 0,8$ ; (c) Expoente de Lyapunov do mapa  $f_I(\cdot)$  em função do parâmetro  $\alpha$ .

Na Figura 5(a) mostra-se um exemplo de  $f_B(s)$  para  $r = 7$  e a partição definida por  $\alpha_1 = -0,5, \alpha_2 = -0,3, \alpha_3 = -0,1, \alpha_4 = 0,2, \alpha_5 = 0,7$  e  $\alpha_6 = 0,8$ . Na Figura 5(b) são mostrados trechos dos sinais  $s(n; 0,3)$  e  $s(n; 0,300000001)$ . Nota-se claramente que esses sinais são aperiódicos e apresentam a DSCI característica dos sinais caóticos.

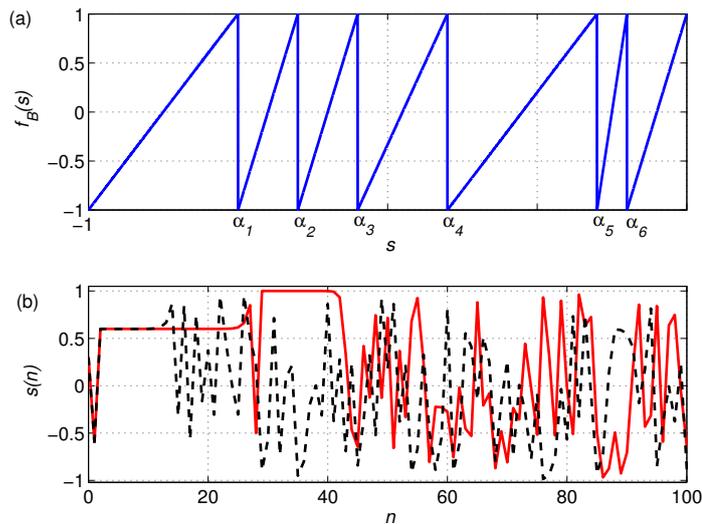


Figura 5: (a) Exemplo de mapa de Bernoulli, (b) trechos de  $s(n; 0,3)$  (linha contínua) e  $s(n; 0,300000001)$  (em tracejado).

Pode-se mostrar [36] que o expoente de Lyapunov para quase todas as órbitas de  $f_B(\cdot)$  é dado por

$$h_B = \sum_{j=1}^r \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{2} \ln \left( \frac{2}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \right) > 0, \tag{16}$$

sendo  $U$  seu atrator.

#### 2.4.4 Mapa quadrático $f_Q(\cdot)$

O mapa quadrático  $f_Q(\cdot)$  e o sistema dinâmico associado são definido por

$$s(n + 1) = f_Q(s(n)) = -2s^2(n) + 1, \tag{17}$$

para condições iniciais  $s_0 \in U = [-1, 1]$ .

Um gráfico de  $f_Q(\cdot)$  é mostrado na Figura 6(a) e a órbita  $s(n; 0,7)$  na Figura 6(b). Este mapa tem dois pontos fixos instáveis,

$$c_1 = -1 \text{ e } c_2 = 0,5. \tag{18}$$

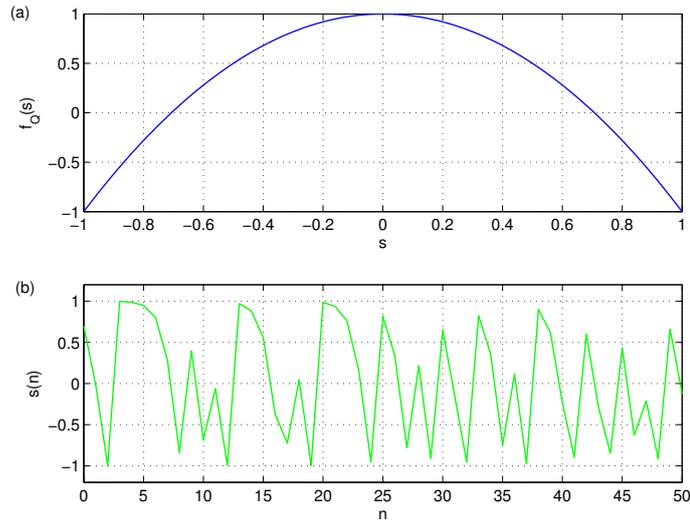


Figura 6: (a) Mapa quadrático  $f_Q(\cdot)$ ; (b) trecho do sinal  $s(n; 0, 7)$ .

A derivada de  $f_Q(\cdot)$  varia ponto a ponto sendo mais difícil o cálculo do expoente de Lyapunov e a consequente análise da dinâmica das órbitas desse mapa. Para resolver esse problema, pode-se utilizar o conceito de mapa de conjugação, visto na Definição 12, página 5. Pode-se mostrar que os mapas  $f_T(\cdot)$  e  $f_Q(\cdot)$  são conjugados com mapa de conjugação [1]

$$C_{TQ}(s) = -\cos \frac{\pi(s+1)}{2}. \tag{19}$$

Assim, usando o Teorema 2 pode-se afirmar que a cada uma das não enumeráveis órbitas caóticas de  $f_T(\cdot)$  corresponde uma órbita caótica de  $f_Q(\cdot)$  com expoente de Lyapunov  $h_Q = h_T = \ln 2$ . É interessante ressaltar que algumas condições iniciais irracionais de  $f_T(\cdot)$  são mapeadas em condições iniciais racionais de  $f_Q(\cdot)$ . Dessa forma, nesse caso, o comportamento caótico pode ser observado diretamente por meio de iterações de (17).

O conjunto atrator de todas as órbitas caóticas de  $f_Q(\cdot)$  é novamente  $U$ .

A seguir, exemplificam-se dois mapas bidimensionais e um mapa tridimensional.

### 2.4.5 Mapa de Hénon $f_H(\cdot)$

O mapa de Hénon, proposto originalmente em [37], é definido por

$$\mathbf{s}(n+1) = \mathbf{f}_H(\mathbf{s}(n)) = \begin{bmatrix} s_1(n+1) \\ s_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2(n) + 1 - as_1^2(n) \\ bs_1(n) \end{bmatrix} \tag{20}$$

, sendo  $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$  parâmetros. Por exemplo, para  $a = 1,4$  e  $b = 0,3$  verifica-se que esse sistema é um GSC.

Nos gráficos (a) e (b) da Figura 7 mostra-se um trecho da órbita obtida com condição inicial  $\mathbf{s}_0 = [0 \ 0]^T$  para esses valores dos parâmetros. O atrator, obtido desprezando-se as primeiras  $10^3$  iterações, é mostrado no gráfico (c).

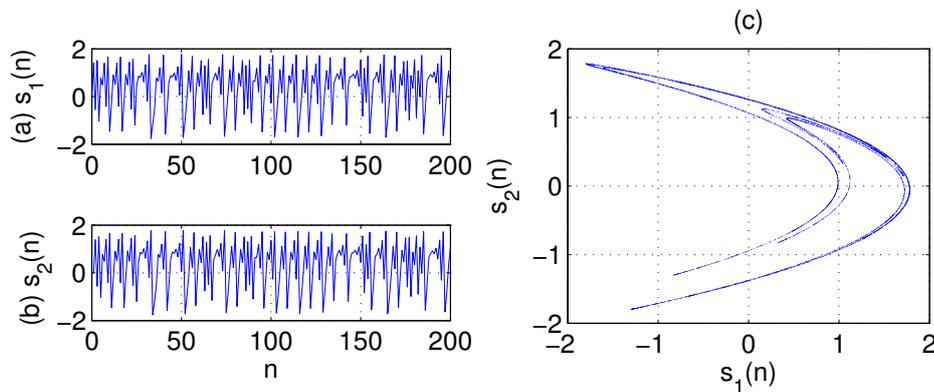


Figura 7: Mapa de Hénon  $f_H(\cdot)$ : (a) e (b) trecho da órbita com condição  $\mathbf{s}_0 = [0 \ 0]^T$ ; (c) atrator da órbita.

Os expoentes de Lyapunov das órbitas que são atraídas para o atrator na Figura 7(c) podem ser obtidos numericamente resultando  $h^{(1)} = 0,42$  e  $h^{(2)} = -1,62$  [1, p. 201]. Esses expoentes e o aspecto aperiódico da órbita observada levam a concluir que ela é caótica.

### 2.4.6 Mapa de Ikeda $f_{Ik}(\cdot)$

Usando algumas hipóteses simplificadoras, o mapa de Ikeda é um modelo para um tipo de célula que pode ser utilizado em computadores ópticos [1, 38]. É um mapa bidimensional dado por

$$s(n+1) = f_{Ik}(s(n)) = \begin{bmatrix} s_1(n+1) \\ s_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + C_2(s_1(n)\cos\tau(n) - s_2(n)\sin\tau(n)) \\ C_2(s_1(n)\sin\tau(n) - s_2(n)\cos\tau(n)) \end{bmatrix} \quad (21)$$

sendo

$$\tau(n) = C_1 - \frac{C_3}{1 + (s_1(n))^2 + (s_2(n))^2} \quad (22)$$

e  $R, C_1, C_2$  e  $C_3$  parâmetros reais.

Considerando-se os parâmetros usuais [1, p. 202]

$$C_1 = 0,4, \quad C_2 = 0,9, \quad C_3 = 6 \quad \text{e} \quad R = 1, \quad (23)$$

o mapa de Ikeda apresenta um atrator caótico com expoentes de Lyapunov  $h^{(1)} \approx 0,51$  e  $h^{(2)} \approx -0,72$  e um ponto fixo localizado em  $c \approx [2,97 \quad 4,15]^T$  com expoentes de Lyapunov  $h^{(1)} \approx -0,11$  e  $h^{(2)} \approx -0,10$ . Para esse conjunto de parâmetros, as órbitas de (21) podem apresentar dois comportamentos distintos: (i) convergência para o ponto fixo  $c$  ou (ii) convergência para o atrator caótico.

Na Figura 8 são mostrados ambos os atratores no plano  $s_1(n) \times s_2(n)$  assim como trechos de suas bacias de atração. O atrator caótico é mostrado em preto e o ponto fixo atrator é indicado pela cruz. A área em amarelo indica a bacia de atração para o atrator caótico. Os pontos fora dessa área levam a órbita para o ponto fixo. Na Figura 9, são mostrados trechos de  $s_1(n)$  e  $s_2(n)$  ao longo das iterações para  $s_0 = [0 \ 0]^T$ .

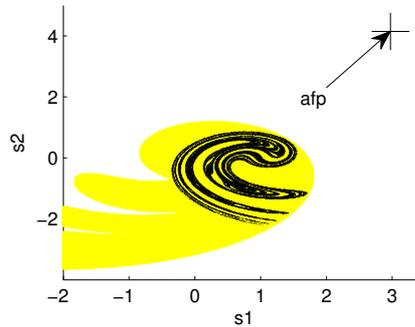


Figura 8: Atratores de  $f_{Ik}(\cdot)$ . A área amarela indica a bacia de atração para o atrator caótico mostrado em preto. Órbitas iniciadas fora da área amarela são levadas para o ponto fixo indicado pela cruz [39].

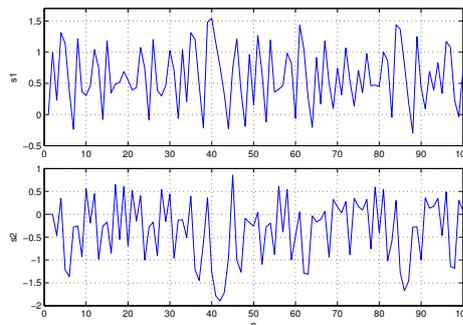


Figura 9: Trechos de  $s_1(n)$  e  $s_2(n)$  do mapa  $f_{Ik}(\cdot)$  com os parâmetros (23), inicializado com  $s(0) = [0 \ 0]^T$ .

### 2.4.7 Mapa de Hénon tridimensional $f_{H3}(\cdot)$

Uma generalização para três dimensões do mapa de Hénon foi proposta em [40]. Ela é dada por

$$s(n+1) = f_{H3}(s(n)) = \begin{bmatrix} s_1(n+1) \\ s_2(n+1) \\ s_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -as_1^2(n) + s_3(n) + 1 \\ -bs_1(n) \\ bs_1(n) + s_2(n) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

sendo  $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$  parâmetros. Para  $a = 1,07$  e  $b = 0,3$  verifica-se que quase todas as condições iniciais dentro da esfera unitária geram sinais caóticos cujo maior expoente de Lyapunov é  $h \approx 0,23$ .

Nos gráficos (a)-(c) da Figura 10 mostra-se um trecho da órbita obtida com condição inicial  $s_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$  para esses valores dos parâmetros. O atrator é mostrado na Figura 7(d), desprezando-se as primeiras  $10^3$  iterações.

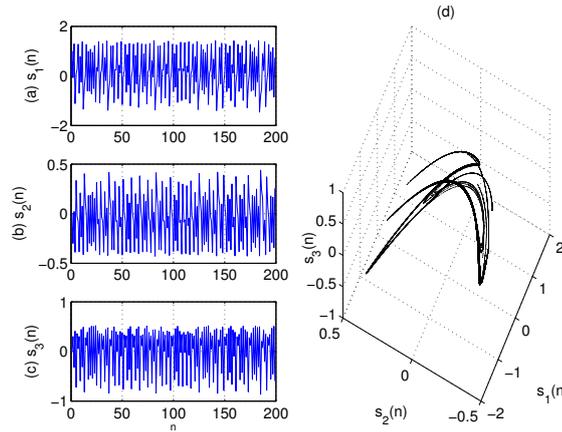


Figura 10: Mapa de Hénon tridimensional  $f_{H3}(\cdot)$ : (a), (b) e (c) trecho da órbita com condição  $s_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ ; (d) atrator da órbita.

## 2.5 Densidade invariante e o operador de Frobenius-Perron

O estudo de órbitas caóticas em sistemas discretos pode ser facilitado, analisando-se como seus mapas atuam sobre conjuntos de pontos, descritos por densidades, ao invés de sobre uma única condição inicial [28, 41].

Quando um dado mapa opera sobre uma densidade como condição inicial ao invés de sobre um único ponto, então as densidades sucessivas são dadas por um operador conhecido como *operador de Frobenius-Perron*. O objetivo aqui é fornecer uma interpretação intuitiva desse operador. Restringe-se a discussão aos mapas unidimensionais.

Órbitas caóticas são difíceis de serem caracterizadas individualmente. Considerando-se, por exemplo, o mapa  $f_Q(\cdot)$ , suas órbitas têm como atrator todo o intervalo  $U = [-1, 1]$  e, devido à DSCI, seu comportamento de longo termo é imprevisível, caso não se conheça sua condição inicial com precisão absoluta.

Pode-se construir um histograma para mostrar a frequência com que os pontos ao longo de uma trajetória caem em dadas regiões do domínio  $U$ . Esse histograma é obtido dividindo-se  $U$  em  $I$  intervalos disjuntos de forma que o  $i$ -ésimo intervalo, (negligenciando o ponto +1) é dado por

$$U_i = \left[ \frac{2(i-1)}{I} - 1, \frac{2i}{I} - 1 \right), \quad i = 1, \dots, I. \quad (25)$$

A seguir, toma-se uma condição inicial  $s_0$  e calcula-se uma longa trajetória de comprimento  $K \gg I$ . Assim, é imediato estimar a probabilidade  $P(s(n) \in U_i)$  como a fração dos  $K$  pontos, chamada aqui de  $P_i$ , que estão no  $i$ -ésimo intervalo

$$P_i \approx \frac{\#\{f^k(s_0) \in U_i, k = 0, 1, \dots, K-1\}}{K}, \quad (26)$$

em que  $\#A$  representa a cardinalidade do conjunto  $A$ .

Nos histogramas da Figura 11 mostram-se os resultados desse procedimento, tomando-se como condições iniciais  $s_1(0) = 0,7$  e  $s_2(0) = 0,4$ , utilizando-se  $I = 40$  intervalos e  $K = 10^4$  pontos. Nesses histogramas, a área do retângulo sobre o intervalo  $U_i$  é a aproximação para  $P_i$  de (26).

Existe uma simetria interessante no resultado já que os pontos concentram-se claramente próximos de  $-1$  e  $1$  com mínimo próximo de  $s = 0$ , apesar das órbitas ponto a ponto serem bastante diferentes. Repetindo o procedimento para outras condições iniciais chega-se, em geral, ao mesmo resultado. Assim, apesar da DSCI das órbitas individualizadas, essa sensibilidade não se reflete na distribuição dos pontos ao longo da trajetória.

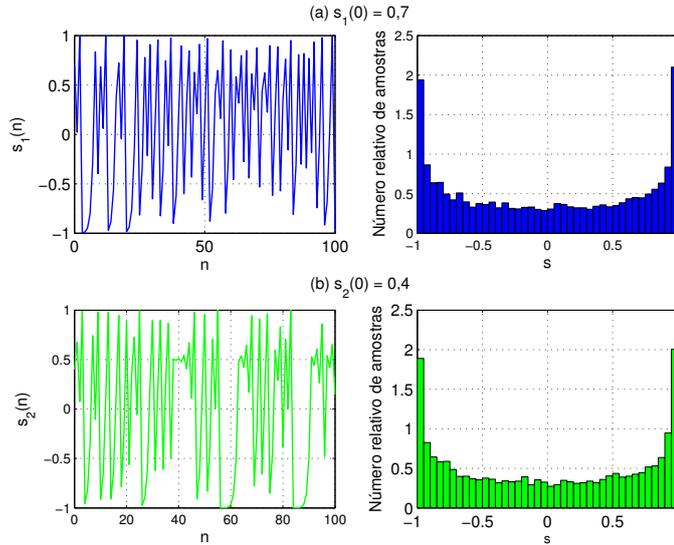


Figura 11: Órbitas e histogramas do mapa  $f_Q(\cdot)$  obtidos com  $K = 10^4$  pontos ,  $I = 40$  intervalos e condições iniciais (a)  $s_1(0) = 0,7$  e (b)  $s_2(0) = 0,4$ .

Nota-se que para algumas condições iniciais selecionadas, comportamentos diferentes podem ocorrer. Por exemplo, algumas condições iniciais geram sinais que são atraídos para um dos pontos fixos (18) de  $f_Q(\cdot)$ . Quando isso ocorre a órbita assume um valor constante ( $c_1$  ou  $c_2$ ) após algumas amostras, como exemplificado na Figura 12(a). Para outras condições iniciais, a órbita é eventualmente periódica e também não exibe o comportamento irregular das órbitas da Figura 11. Essa situação é ilustrada na Figura 12(b).

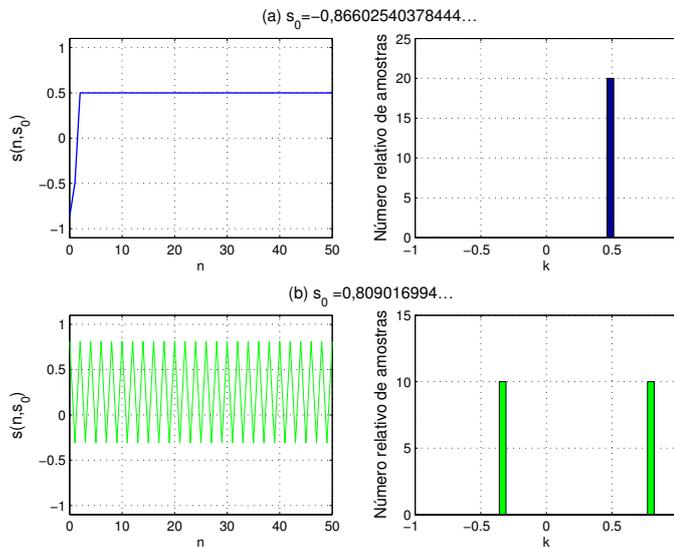


Figura 12: Órbitas e histogramas de  $f_Q(\cdot)$  sem comportamento caótico. (a)  $s_0 = -\sqrt{\frac{3}{4}}$ ; (b)  $s_0 \approx 0,809016994$ . Foram usados  $K = 10^4$  pontos e  $I = 40$  intervalos.

O problema da descrição dos comportamentos esperados para órbitas de um mapa pode ser parcialmente resolvido abandonando-se o estudo de órbitas individuais em favor do exame do fluxo de densidades.

Considere um mapa  $f(\cdot)$  definido em  $U$  e tome-se um grande número  $Q$  de condições iniciais  $s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0Q}$ . A cada uma dessas condições iniciais aplica-se o mapa  $f(\cdot)$ , obtendo-se  $Q$  novos pontos  $s(1; s_{01}) \equiv s_{11}, s(1; s_{02}) \equiv s_{12}, \dots, s(1; s_{0Q}) \equiv s_{1Q}$ .

Para definir a densidade inicial e final desses pontos, é interessante introduzir o conceito de *função indicadora* de um conjunto  $A$ . Ela é simplesmente definida por

$$I_A(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } s \in A \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (27)$$

Considere-se um intervalo  $A_0 \subset U$  e um conjunto de  $Q$  condições iniciais  $s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0Q}$ . Pode-se estimar a função densidade  $p_0(s)$  desses pontos para qualquer  $A_0$  pela relação [28]

$$\int_{A_0} p_0(u) du \approx \frac{1}{Q} \sum_{k=1}^Q I_{A_0}(s_{0k}). \quad (28)$$

Considere então que a função densidade  $p_1(s)$  dos pontos  $s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1Q}$  satisfaz

$$\int_A p_1(u) du \approx \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q I_A(s_{1q}) \quad (29)$$

para  $A \subset U$ .

Deseja-se obter uma relação entre  $p_1$  e  $p_0$ . Para fazê-lo é necessário introduzir o conceito de *contraimagem* de um intervalo  $A \subset U$  sob a operação do mapa  $f(\cdot)$  ou

$$f^{-1}(A) = \{s \in U / f(s) \in A\}. \quad (30)$$

Como ilustrado na Figura 13, para o mapa  $f_Q(\cdot)$  a contraimagem de um intervalo é a união de dois intervalos.

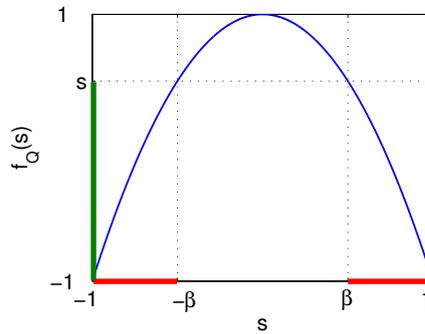


Figura 13: Contraimagem do intervalo  $[-1, s]$  por  $f_Q(\cdot)$  representada por linhas grossas no eixo das abscissas com  $\beta = \sqrt{\frac{1-s}{2}}$ .

Note que para qualquer  $A \subset U$ ,

$$s_{1q} \in A \Leftrightarrow s_{0q} \in f^{-1}(A), \quad (31)$$

para  $q = 1, 2, \dots, Q$ . Assim, tem-se a seguinte relação útil

$$I_A(f(s)) = I_{f^{-1}(A)}(s). \quad (32)$$

Com (32) pode-se reescrever (29) como

$$\int_A p_1(u) du \approx \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q I_{f^{-1}(A)}(s_{0q}). \quad (33)$$

Tomando-se  $A_0 = f^{-1}(A)$ , os membros direitos de (28) e (33) são iguais e, portanto

$$\int_A p_1(u) du = \int_{f^{-1}(A)} p_0(u) du. \quad (34)$$

Essa é a relação desejada entre  $p_0(\cdot)$  e  $p_1(\cdot)$ . Dela percebe-se como a densidade inicial de estados  $p_0(\cdot)$  é transformada por um dado mapa  $f(\cdot)$  em uma nova densidade  $p_1(\cdot)$ .

Supondo  $A = [a, s]$  obtém-se uma representação explícita para  $p_1(\cdot)$  reescrevendo-se (34) como

$$\int_a^s p_1(u) du = \int_{f^{-1}([a, s])} p_0(u) du. \quad (35)$$

Diferenciando os dois membros em relação a  $s$ , obtém-se

$$p_1(s) = \frac{d}{ds} \int_{f^{-1}([a, s])} p_0(u) du. \quad (36)$$

Fica claro que  $p_1(\cdot)$  depende de  $p_0(\cdot)$ . Na literatura, esse fato é usualmente indicado por  $p_1 = \mathbb{P}[p_0]$  [28], de forma que (36) torna-se

$$\mathbb{P}[p(s)] = \frac{d}{ds} \int_{f^{-1}([a,s])} p(u) du, \quad (37)$$

em que se retirou o subscrito de  $p_0$ . Essa expressão define explicitamente o *operador de Frobenius-Perron*  $\mathbb{P}[\cdot]$  correspondente à transformação  $f(\cdot)$ ; esse operador é útil no estudo da evolução de densidades.

Uma densidade  $p^*(s)$  que seja ponto fixo do operador  $\mathbb{P}[\cdot]$  para um dado  $f(\cdot)$  é chamada de *densidade invariante* para esse mapa. Em outras palavras,  $p^*(s)$  é uma densidade invariante do mapa  $f(\cdot)$  se e somente se

$$\mathbb{P}[p^*(s)] = p^*(s). \quad (38)$$

**Exemplo 1 (Densidade invariante do mapa  $f_Q(\cdot)$ )** Para ilustrar o conceito do operador de Frobenius-Perron retorna-se ao mapa quadrático  $f_Q(\cdot)$ , aplicando-se (37) a uma fórmula analítica da contraimagem do intervalo  $[-1,s]$ .

Da Figura 13, nota-se que os pontos extremos dos dois intervalos constituintes de  $f_Q^{-1}([-1,s])$  podem ser calculados resolvendo-se uma equação quadrática. Procedendo dessa forma, chega-se a

$$f_Q^{-1}([-1,s]) = \left[-1, -\sqrt{\frac{1-s}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1-s}{2}}, 1\right]. \quad (39)$$

Com isto, (37) pode ser escrita como

$$\mathbb{P}[p(s)] = \frac{d}{ds} \int_{-1}^{-\sqrt{\frac{1-s}{2}}} p(u) du + \frac{d}{ds} \int_{\sqrt{\frac{1-s}{2}}}^1 p(u) du. \quad (40)$$

Realizando-se as diferenciações chega-se a

$$\mathbb{P}[p(s)] = \frac{1}{2\sqrt{2(1-s)}} \left[ p\left(-\sqrt{\frac{1-s}{2}}\right) + p\left(\sqrt{\frac{1-s}{2}}\right) \right]. \quad (41)$$

Essa equação é uma fórmula explícita para o operador de Frobenius-Perron correspondente ao mapa  $f_Q(\cdot)$  e mostra como ele transforma uma dada densidade  $p(\cdot)$  em outra  $\mathbb{P}[p(\cdot)]$ .

Por exemplo, tome-se uma densidade inicial

$$p_0(s) = \frac{1}{2} \quad (42)$$

para  $s \in [-1,1]$ . Então, como os termos dentro dos colchetes em (41) são constantes, um cálculo simples fornece:

$$\mathbb{P}[p_0(s)] = \frac{1}{2\sqrt{2(1-s)}}. \quad (43)$$

Pode-se então substituir essa expressão para  $\mathbb{P}[p_0(\cdot)]$  no lugar de  $p(\cdot)$  no segundo membro de (41) obtendo-se

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mathbb{P}[p_0(s)]] &= \mathbb{P}^2[p_0(s)] = \frac{1}{2\sqrt{2(1-s)}} \left[ \frac{1}{2\sqrt{2\left(1+\sqrt{\frac{1-s}{2}}\right)}} + \frac{1}{2\sqrt{2\left(1-\sqrt{\frac{1-s}{2}}\right)}} \right] \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2(1-s)}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2(1-s)}}} + \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2(1-s)}}} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Na Figura 14(a) são mostrados gráficos de  $p_0(s)$ ,  $\mathbb{P}[p_0(s)]$  e  $\mathbb{P}^2[p_0(s)]$ . Nela vê-se que essas densidades aproximam-se de uma densidade limite. Essa é dada por

$$p_*(s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-s^2}}, & -1 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (45)$$

como pode ser verificado substituindo-se  $p_*(s)$  em (38) para o  $\mathbb{P}[p(s)]$  de (41). Sendo assim,  $p_*(s)$  é uma densidade invariante.

Note-se a semelhança entre o gráfico de  $p_*(s)$  da Figura 14(a) com os histogramas da Figura 11. Na verdade, pode-se mostrar que, para o mapa quadrático, a distribuição dos pontos ao longo de uma órbita típica aproxima-se de  $p_*(s)$  da mesma forma que as iterações de densidades [28], propriedade que pode ser reconhecida como uma forma de ergodicidade desse mapa [4].

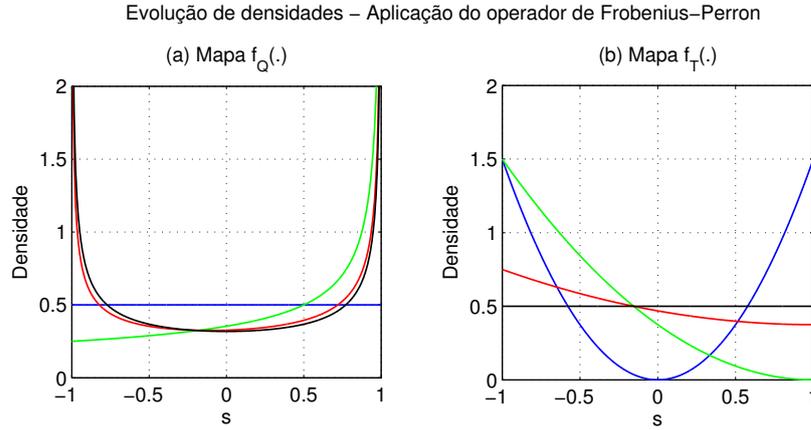


Figura 14: (a) Evolução da densidade constante  $p_0(s) = \frac{1}{2}$  por  $f_Q(\cdot)$ ; (b) Evolução da densidade  $p_0(s) = \frac{3}{2}s^2$  por  $f_T(\cdot)$ . Em azul  $p_0(s)$ , em verde  $\mathbb{P}[p_0(s)]$ , em vermelho  $\mathbb{P}^2[p_0(s)]$  e em preto a densidade invariante,  $p_*(s)$ .

**Exemplo 2 (Densidade invariante do mapa  $f_I(\cdot)$ )** Tome-se um intervalo  $[-1, s] \subset [-1, 1]$  cuja contraimagem sob  $f_I(\cdot)$  de (13) é dada por

$$f_I^{-1}([-1, s]) = [-1, \beta_1] \cup [\beta_2, 1] \quad (46)$$

sendo  $\beta_1 = -\frac{(\alpha+1)s+(\alpha-1)}{2}$  e  $\beta_2 = \frac{(\alpha-1)s+\alpha+1}{2}$ . Sendo assim, o operador de Frobenius-Perron é

$$\mathbb{P}[p(s)] = \frac{d}{ds} \left( \int_{-1}^{\beta_1} p(u)du + \int_{\beta_2}^1 p(u)du \right) = \frac{1}{2} [(\alpha+1)p(\beta_1) + (1-\alpha)p(\beta_2)]. \quad (47)$$

Observa-se na Figura 14(b) que também nesse caso as densidades  $p(\cdot)$  são levadas por  $\mathbb{P}[\cdot]$  a uma densidade invariante. Nessa figura, tomou-se  $\alpha = 0$  e considerou-se como densidade inicial  $p_0(s) = \frac{3}{2}s^2$  que é levada a  $\mathbb{P}[p_0(s)] = \frac{3}{8}(s-1)^2$  e  $\mathbb{P}^2[p_0(s)] = \frac{3}{32}(s^2 - 2s + 5)$ .

Como  $\mathbb{P}\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$  em (47), é fácil ver que a densidade invariante para o mapa  $f_I(\cdot)$  é uniforme,

$$p_*(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (48)$$

A ergodicidade observada para o mapa quadrático também se verifica nesse exemplo.

A densidade invariante é um primeiro exemplo de como um sistema claramente determinista pode ser tratado formalmente como um processo estocástico, em que as condições iniciais definem as funções amostras, para se obter propriedades relevantes do comportamento assintótico das órbitas. Também é a base para se definir Sequências de AutoCorrelação (SAC) e Densidade Espectral de Potência (DEP) de um GSC na Seção 3.

## 2.6 Conclusões

Nessa seção foram definidos e exemplificados conceitos fundamentais da teoria de sistemas dinâmicos não lineares de tempo discreto necessários para o desenvolvimento dos resultados apresentados a seguir. Entre eles destacam-se os de órbita caótica, número de Lyapunov, densidade invariante e o operador de Frobenius-Perron.

Essa rápida revisão pretendeu estabelecer uma notação coerente tornando os resultados descritos acessíveis mesmo a leitores que não sejam especialistas.

Além disso, com relação a caos, órbitas e sistemas caóticos, diversos autores usam definições levemente diferentes. Assim, o autor considerou relevante explicitar as definições utilizadas no presente texto.

## 3 Caracterização temporal e espectral de sinais caóticos

Muitos trabalhos citam “banda larga” como uma propriedade dos sinais caóticos [7, 23]. No entanto, essa caracterização está longe do que é necessário em sistemas de comunicação práticos. Como os canais físicos são sempre de banda limitada, é necessário conhecer exatamente qual a largura de banda ocupada por um sinal caótico transmitido e, preferencialmente, ser capaz de controlá-la. Dessa forma, essa lacuna precisa ser preenchida para viabilizar o emprego prático de sistemas de comunicação utilizando sinais caóticos.

Utilizando sobretudo técnicas descritas no trabalho de Sakai e Tokumaru [42], conseguiu-se obter de forma analítica a DEP associada com os sinais caóticos gerados por alguns mapas lineares por partes.

Nessa seção resumem-se alguns desses resultados. Na Seção 3.1 fazem-se as definições básicas necessárias para a caracterização temporal e espectral de sinais caóticos. Na Seção 3.2, trata-se das órbitas do mapa  $f_I(\cdot)$ , que foi definido na Seção 2.4.2. Em seguida, na Seção 3.3 trata-se da DEP do mapa  $f_B(\cdot)$ , definido na Seção 2.4.3.

### 3.1 Definições básicas

A definição de DEP para sinais caóticos não é evidente. Esses sinais são deterministas, por definição, porém um mesmo mapa gera uma infinidade de sinais diferentes associados com diferentes condições iniciais. Como então associar uma DEP ao conjunto de sinais gerados por um dado mapa?

Uma solução eficaz para esse problema é aplicar a sinais caóticos a notação formalmente utilizada para sinais e sistemas aleatórios [28]. A ideia básica é simples: da mesma forma como um processo estocástico é um conjunto de funções-amostras, cada uma delas determinista, um mapa é tratado como um conjunto de sinais, cada um determinista, associado a condições iniciais diferentes. As médias amostrais são substituídas por médias sobre os sinais gerados por condições iniciais diferentes. Da mesma forma como nos processos aleatórios ergódicos, nos sistemas dinâmicos ergódicos pode-se substituir médias amostrais por médias no tempo.

Usando a analogia entre mapa e processo estocástico, define-se a SAC  $R(k)$  das órbitas de um mapa  $f(\cdot)$  ergódico como

$$R(k) \triangleq \mathbb{E} [s(n)s(n+k)], \quad (49)$$

sendo  $k$  um número inteiro que representa o passo da correlação e  $n$  qualquer. A esperança matemática  $\mathbb{E}[\cdot]$  é tomada sobre todas as condições iniciais que geram sinais caóticos. Neste cálculo, considera-se que  $s(n) = 0$  para  $n < 0$ . Em particular, define-se a potência média dos sinais caóticos gerados como

$$P_{\text{med}} \triangleq R(0) = \mathbb{E} [s(n)^2]. \quad (50)$$

Para processos estocásticos estacionários, a DEP  $S(\omega)$  é obtida calculando-se a Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD) de  $R(k)$ , considerando-se  $k$  a variável temporal [43, p. 6]. Seguindo a analogia entre sinais caóticos definidos por um mapa e sinais aleatórios definidos por um processo estocásticos, utiliza-se a mesma definição aqui, ou seja,

$$S(\omega) = \mathbb{F} [R(k)] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k)e^{-j\omega k}, \quad (51)$$

sendo  $\mathbb{F}[\cdot]$  o operador TFTD.

Como qualquer TFTD,  $S(\omega)$  é periódica com período  $2\pi$ . Além disso, devido à simetria par de  $R(k)$ , ela é real e par. Dessa forma, nos gráficos desse texto, sempre apresenta-se  $S(\omega)$  no intervalo  $0 \leq \omega < \pi$ . Também, pode-se mostrar que [43, p. 5-7]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S(\omega) d\omega = P_{\text{med}}, \quad (52)$$

justificando assim  $S(\omega)$  ser uma densidade de potência.

Muitos sinais, apesar de terem DEP não nula sobre todo o intervalo  $0 \leq \omega < \pi$ , apresentam uma concentração de sua potência numa certa faixa de frequências. A banda essencial  $B$  é uma medida dessa faixa efetivamente ocupada pelo sinal. Existem diversas definições formais possíveis para  $B$  [44]. Nesse texto,  $B$  será definida como o comprimento do intervalo de frequências em que  $p = 95\%$  da potência do sinal está concentrada [44]. Para um sinal passa-baixas,

$$\int_0^B S(\omega) d\omega \triangleq p \int_0^{\pi} S(\omega) d\omega = p\pi P_{\text{med}}. \quad (53)$$

Usando essas definições, nas próximas seções exploram-se as propriedades temporais e espectrais das órbitas dos mapas tenda inclinada  $f_I(\cdot)$  e de Bernoulli  $f_B(\cdot)$ .

### 3.2 Um estudo das órbitas do mapa tenda inclinada $f_I(\cdot)$

Escolheu-se inicialmente tratar dos sinais gerados por  $f_I(\cdot)$ , definida na Seção 2.4.2, página 7, porque eles apresentam comportamento rico e variado, mas ainda assim de fácil esquematização. Pelo fato destes mapas serem lineares por partes e suas órbitas apresentarem densidade invariante uniforme, as deduções tornam-se tratáveis analiticamente. Além disso, nessa família está incluso o mapa  $f_T(\cdot)$  (11), cujos sinais gerados possuem características espectrais que já eram bem conhecidas [45] quando se iniciou o estudo. Os resultados apresentados aqui foram publicados originalmente em [24, 25].

Usando o fato de que a densidade invariante  $p_*(s)$  de  $f_I(\cdot)$  é uniforme no intervalo  $U = [-1, 1]$ , vide (48), conclui-se que quase todas as suas órbitas possuem média nula e potência média

$$P_{\text{med}} = \mathbb{E} [s(n)^2] = \int_{-1}^1 s^2 p_*(s) ds = \frac{1}{3}, \quad (54)$$

para qualquer valor de  $\alpha$ .

### 3.2.1 Sequência de autocorrelação

A partir da definição (49), obtém-se a seguir a SAC das órbitas do mapa  $f_I(\cdot)$ . Para facilitar a notação definem-se

$$x \triangleq s(n) \text{ e } y \triangleq s(n+k) = f_I^k(x). \quad (55)$$

Como  $y$  é completamente determinado por  $x$ , a densidade conjunta  $p(x,y)$  é dada por

$$p(x,y) = p_*(x)\delta(y - f_I^k(x)), \quad (56)$$

em que  $p_*(\cdot)$  é a densidade invariante do mapa  $f_I(\cdot)$  e  $\delta(\cdot)$  representa a função impulso unitário de tempo contínuo [46, p. 22]. Dessa forma, usando-se (48) e (55) em (49), tem-se

$$\begin{aligned} R(k) &= \mathbb{E}[xy] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xyp(x,y)dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xyp_*(x)\delta(y - f_I^k(x)) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f_I^k(x) dx. \end{aligned} \quad (57)$$

Assim, para encontrar  $R(k)$  é necessário obter uma expressão para  $f_I^k(\cdot)$ .

O mapa  $f_I(\cdot)$  é constituído de dois segmentos de reta de inclinações de sinais opostos. A imagem de cada um desses segmentos é igual ao domínio  $U$  do mapa. Consequentemente,  $f_I^k(\cdot)$  consiste de  $2^k$  segmentos. Representa-se a  $m$ -ésima solução da equação  $f_I^k(\cdot) = 1$  por  $a_k(m)$ , em que  $1 \leq m \leq 2^{k-1}$  e a  $m$ -ésima solução da equação  $f_I^k(\cdot) = -1$  por  $b_k(m)$ , com  $0 \leq m \leq 2^{k-1}$ .

As equações dos segmentos que constituem o mapa  $f_I^k(x)$  são:

- segmento que passa por  $(b_k(m-1), -1)$  e  $(a_k(m), 1)$ :

$$y = \frac{2}{a_k(m) - b_k(m-1)} (x - b_k(m-1)) - 1 = \frac{2x - a_k(m) - b_k(m-1)}{a_k(m) - b_k(m-1)}; \quad (58)$$

- segmento que passa por  $(a_k(m), 1)$  e  $(b_k(m), -1)$ :

$$y = \frac{-2}{b_k(m) - a_k(m)} (x - a_k(m)) + 1 = \frac{2x - a_k(m) - b_k(m)}{a_k(m) - b_k(m)}. \quad (59)$$

Substituindo-se (58) e (59) em (57),

$$R(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \left( \underbrace{\int_{b_k(m-1)}^{a_k(m)} x \left( \frac{2x - a_k(m) - b_k(m-1)}{a_k(m) - b_k(m-1)} \right) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{a_k(m)}^{b_k(m)} x \left( \frac{2x - a_k(m) - b_k(m)}{a_k(m) - b_k(m)} \right) dx}_{I_2} \right). \quad (60)$$

Calculando-se as integrais  $I_1$  e  $I_2$  em (60) separadamente, obtém-se

$$I_1 = \frac{(a_k(m) - b_k(m-1))^2}{6} \text{ e } I_2 = -\frac{(a_k(m) - b_k(m))^2}{6}. \quad (61)$$

Assim,

$$R(k) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} [(a_k(m) - b_k(m-1))^2 - (a_k(m) - b_k(m))^2]. \quad (62)$$

Visando uma fórmula mais simples para  $R(k)$ , busca-se uma forma recursiva para  $R(k+1)$  em função de  $R(k)$ . Calculando-se  $R(k+1)$  a partir de (62), obtém-se

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{2^k} [(a_{k+1}(m) - b_{k+1}(m-1))^2 - (a_{k+1}(m) - b_{k+1}(m))^2]. \quad (63)$$

Separando-se as parcelas de índices pares e ímpares, tem-se

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} [(a_{k+1}(2m) - b_{k+1}(2m-1))^2 - (a_{k+1}(2m) - b_{k+1}(2m))^2 + \quad (64)$$

$$(a_{k+1}(2m-1) - b_{k+1}(2m-2))^2 - (a_{k+1}(2m-1) - b_{k+1}(2m-1))^2]. \quad (65)$$

Ao iterar uma vez o mapa, passa-se de  $f_I^k(x)$  para  $f_I^{k+1}(x)$ . Representando-se por  $w$  e  $z$  são raízes da equação  $f_I^k(x) = \alpha$ , observa-se que

$$\begin{cases} b_{k+1}(2m-2) & = b_k(m-1), \\ a_{k+1}(2m-1) & = w, \\ b_{k+1}(2m-1) & = a_k(m), \\ a_{k+1}(2m) & = z, \\ b_{k+1}(2m) & = b_k(m). \end{cases} \quad (66)$$

Para determinar  $w$  e  $z$ , substitui-se  $y$  por  $\alpha$  em (58) e (59), respectivamente e isola-se  $x$ . Desta forma, obtém-se

$$\begin{cases} w = \frac{\alpha+1}{2}(a_k(m) - b_k(m-1)) + b_k(m-1) \\ z = \frac{\alpha+1}{2}(a_k(m) - b_k(m)) + b_k(m). \end{cases} \quad (67)$$

Substituindo-se (66) e (67) em (65) e realizando-se algumas manipulações, chega-se a

$$\begin{aligned} R(k+1) &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \left\{ \left[ \frac{\alpha+1}{2}(a_k(m) - b_k(m)) + b_k(m) - a_k(m) \right]^2 - \left[ \frac{\alpha+1}{2}(a_k(m) - b_k(m)) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\alpha+1}{2}(a_k(m) - b_k(m-1)) \right]^2 - \left[ \frac{\alpha+1}{2}(a_k(m) - b_k(m-1)) + b_k(m-1) - a_k(m) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (68)$$

Expandindo-se os termos quadráticos do somatório e agrupando-se termos comuns, finalmente obtém-se

$$R(k+1) = \frac{\alpha}{12} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \left[ (a_k(m) - b_k(m-1))^2 - (a_k(m) - b_k(m))^2 \right]. \quad (69)$$

Comparando (62) e (69), observa-se que

$$R(k+1) = \alpha R(k). \quad (70)$$

De (54), a condição inicial dessa equação de diferenças é  $R(0) = \mathbb{E}[s(n)^2] = \frac{1}{3}$ . Assim, resolvendo-se (70), obtém-se

$$\boxed{R(k) = \frac{1}{3} \alpha^{|k|}}. \quad (71)$$

Observa-se que para  $\alpha > 0$ ,  $R(k)$  decai monotonicamente com  $|k|$  e que para  $\alpha < 0$ ,  $R(k)$  alterna de sinal a cada  $k$ , indicando que, neste caso, para quase quaisquer  $n$  e  $s_0$ , os pontos  $s(n; s_0)$  e  $s(n+1, s_0)$  têm sinais diferentes. Nota-se que, se  $R_{\alpha_1}(k)$  é a SAC para o mapa tenda com  $\alpha = \alpha_1$ ,  $R_{\alpha_2}(k)$  é SAC para  $\alpha = \alpha_2$  e  $\alpha_1 = -\alpha_2$ , então

$$R_{\alpha_2}(k) = (-1)^k R_{\alpha_1}(k). \quad (72)$$

Estes resultados mostram que sinais caóticos nem sempre possuem SAC na forma impulsiva. Neste caso, obtém-se esta forma apenas para  $\alpha = 0$ , coincidindo com o resultado obtido em [45] para  $\beta = 2$ .

### 3.2.2 Densidade espectral de potência

Aplicando-se a TFTD aos dois membros de (71) e usando a definição (51),

$$S(\omega) = \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-j\omega k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha^{-k} e^{-j\omega k} \right] = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{j\omega}} - 1 \right) \quad (73)$$

ou

$$\boxed{S(\omega) = \frac{1 - \alpha^2}{3(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega))}}. \quad (74)$$

De (74), observa-se que o parâmetro da família controla a forma como a potência está distribuída na frequência. Quanto maior o módulo de  $\alpha$ , menor a faixa de frequências em que está concentrada a potência do sinal resultante. Além disso, o sinal de  $\alpha$  define se a potência está concentrada nas altas ou baixas frequências.

As DEPs de sinais gerados por mapas com valores de  $\alpha$  opostos apresentam simetria em relação a  $\omega = \pi/2$ , ou seja, se  $\alpha_1 = -\alpha_2$ ,  $S_{\alpha_1}(\omega) = S_{\alpha_2}(\omega + \pi)$ , em que  $S_{\alpha_1}(\omega)$  é a DEP das órbitas geradas quando  $\alpha = \alpha_1$  e  $S_{\alpha_2}(\omega)$  é a DEP das órbitas geradas quando  $\alpha = \alpha_2$ . Esse resultado é esperado devido à relação (72) e à propriedade do deslocamento em frequência da TFTD [47, p. 59].

### 3.2.3 Banda essencial

Para valores de  $\alpha$  opostos, devido à simetria apontada na seção anterior, as bandas essenciais dos sinais gerados são iguais. Assim, no desenvolvimento seguinte, considera-se apenas valores positivos de  $\alpha$ .

De (74),

$$\int_0^B S(\omega) d\omega = \frac{2}{3} \arctan \left[ \left| \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \right| \tan \left( \frac{B}{2} \right) \right]. \quad (75)$$

Substituindo (54) e (75) na definição (53) e isolando-se  $B$ , obtém-se

$$B = 2 \arctan \left[ \tan \left( \frac{p\pi}{2} \right) \left| \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right| \right]. \quad (76)$$

Como  $B = p\pi$  para  $\alpha = 0$  e levando-se em conta a densidade invariante uniforme (48), obtém-se, neste caso, sinais que se comportam em termos temporais e espectrais como um ruído branco uniforme. Já para  $|\alpha| \approx 1$ , as órbitas comportam-se como funções-amostras de um processo com banda extremamente estreita. É importante ressaltar que, em todos os casos, o expoente de Lyapunov é positivo e assim, os sinais gerados são caóticos para todos os valores de  $\alpha$ .

### 3.2.4 Conclusões

Os resultados obtidos mostram que, escolhendo-se um  $\alpha$  adequado, pode-se utilizar o mapa  $f_I(\cdot)$  para se obter um sinal caótico banda larga ou estreita, com sua potência concentrada nas frequências altas ou baixas e com a banda essencial bem definida.

É importante realçar, portanto, que sinais caóticos não implicam, necessariamente, banda larga e SAC impulsiva.

Em [48,49] mostram-se resultados numéricos que concordam perfeitamente com os resultados teóricos descritos aqui. Com a possibilidade de se gerar sinais caóticos banda estreita, propôs-se em [24] a multiplexação e demultiplexação de sinais caóticos em frequência, de forma similar ao que se faz em sistemas de modulação em frequência convencionais.

Usando técnicas similares às apresentadas aqui, diversos autores propuseram resultados para diversas famílias de mapas lineares por partes. Veja, por exemplo, [50,51]. Uma generalização particularmente interessante para o mapa de Bernoulli com  $r$  inclinações,  $f_B(\cdot)$  da Seção 2.4.3, foi obtida recentemente e é descrita a seguir.

### 3.3 Um estudo das órbitas do mapa de Bernoulli $f_B(\cdot)$

O mapa de Bernoulli com  $r$  inclinações  $f_B(\cdot)$  foi definido na Seção 2.4.3, página 7. Diferentemente do mapa  $f_I(\cdot)$  que possui um único parâmetro  $\alpha$ , o mapa de Bernoulli possui  $r - 1$  parâmetros diferentes, o que torna o problema, em princípio, bem mais desafiante. Por outro lado, pode-se mostrar [27] que a densidade invariante para  $f_B(\cdot)$  é uniforme, dada por

$$p_*(s) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq s < 1, \quad (77)$$

o que torna o problema tratável. Assim, escolheu-se determinar suas características temporais e espectrais como um segundo problema após os resultados obtidos para  $f_I(\cdot)$ , mostrados na seção anterior.

Da mesma forma que para  $f_I(\cdot)$ , quase todas as suas órbitas possuem média nula e potência média

$$P_{\text{med}} = \mathbb{E} [s(n)^2] = \int_{-1}^1 s^2 p_*(s) ds = \frac{1}{3}, \quad (78)$$

para quaisquer valores de  $r \geq 2$  e  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j < r - 1$ .

#### 3.3.1 Sequência de autocorrelação

O procedimento utilizado para o cálculo da SAC para o mapa  $f_B(\cdot)$  segue de perto o utilizado para o mapa  $f_I(\cdot)$  na Seção 3.2.1.

Para facilitar a notação, definem-se

$$\begin{cases} x \triangleq s(n) \\ y \triangleq s(n+k) = f_B^k(x). \end{cases} \quad (79)$$

Como  $y$  é completamente determinado por  $x$ , a densidade invariante conjunta de  $x$  e  $y$ ,  $p(x,y)$ , pode ser escrita como

$$p(x,y) = p_*(x) \delta(y - f_B^k(x)). \quad (80)$$

Substituindo (79) e (80) na definição (49) e usando-se (77) pode-se escrever

$$\begin{aligned} R(k) &= \mathbb{E} [xy] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xyp(x,y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xyp_*(x) \delta(y - f_B^k(x)) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f_B^k(x) dx. \end{aligned} \quad (81)$$

Para obter uma fórmula fechada para (81) é necessária uma expressão para  $f_B^k(x)$ , a  $k$ -ésima iteração de  $f_B(\cdot)$ .

O mapa  $f_B(\cdot)$  é constituído de  $r$  segmentos de reta. A imagem de cada um desses segmentos é igual ao domínio  $U = [-1, 1[$  do mapa. Consequentemente,  $f_B^k(\cdot)$  consiste de  $r^k$  segmentos. Representa-se a  $m$ -ésima solução da equação  $f_B^k(\cdot) = -1$  por  $a_k(m-1)$ , para  $k = 1, 2, \dots$  e  $m = 1, 2, \dots, r^k$ . Define-se  $a_k(r^k) = 1$ .

Nota-se que  $f_B^k(x)$  no intervalo  $[a_k(m-1), a_k(m)[$  é dado por

$$f_B^k(x) = \frac{2x - a_k(m) - a_k(m-1)}{a_k(m) - a_k(m-1)}, \quad a_k(m-1) \leq x < a_k(m). \quad (82)$$

Substituindo (82) em (81),

$$R(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r^k} \underbrace{\int_{a_k(m-1)}^{a_k(m)} x \frac{2x - a_k(m) - a_k(m-1)}{a_k(m) - a_k(m-1)} dx}_I. \quad (83)$$

Resolvendo-se a integral  $I$ ,

$$\begin{aligned} I &= \left[ \frac{2x^3}{3(a_k(m) - a_k(m-1))} - \frac{(a_k(m) + a_k(m-1))x^2}{2(a_k(m) - a_k(m-1))} \right]_{a_k(m-1)}^{a_k(m)} \\ &= \frac{a_k^3(m) - 3a_k^2(m)a_k(m-1) + 3a_k(m)a_k^2(m-1) - a_k^3(m-1)}{6(a_k(m) - a_k(m-1))} \\ &= \frac{(a_k(m) - a_k(m-1))^2}{6}. \end{aligned} \quad (84)$$

Em seguida, substituindo esse resultado em (83), obtém-se

$$R(k) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} (a_k(m) - a_k(m-1))^2. \quad (85)$$

Assim como foi feito no caso do mapa  $f_I(\cdot)$ , pode-se buscar uma forma recursiva para  $R(k+1)$  em função de  $R(k)$ . De (85),  $R(k+1)$  é dada por

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^{k+1}} (a_{k+1}(m) - a_{k+1}(m-1))^2. \quad (86)$$

Pode-se reescrever (86) como um somatório de  $r^k$  somas de  $r$  parcelas, ou seja,

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r (a_{k+1}(r(m-1) + j) - a_{k+1}(r(m-1) + j-1))^2. \quad (87)$$

É necessário então encontrar relações entre os valores de  $a_{k+1}$  e  $a_k$ . Definindo-se  $w_{m,j}$  tal que

$$f_B^k(w_{m,j}) = \alpha_j \quad (88)$$

no intervalo  $[a_k(m-1), a_k(m)[$ ,  $0 \leq j \leq r$ , chega-se a

$$a_{k+1}(r(m-1) + j) = w_{m,j}, \quad (89)$$

para  $0 \leq j \leq r$ . Usando esse resultado em (87), tem-se

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r (w_{m,j} - w_{m,j-1})^2. \quad (90)$$

Os valores de  $w_{m,j}$  podem ser obtidos substituindo-se (88) em (82). Obtém-se

$$w_{m,j} = \frac{(a_k(m) - a_k(m-1))\alpha_j + a_k(m) + a_k(m-1)}{2}. \quad (91)$$

Substituindo em (90),

$$\begin{aligned} R(k+1) &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r \left( (a_k(m) - a_k(m-1)) \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} (a_k(m) - a_k(m-1))^2 \sum_{j=1}^r \left( \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (92)$$

Assim,  $R(k+1)$  pode ser escrita como

$$R(k+1) = \frac{\psi}{12} \sum_{m=1}^{r^k} (a_k(m) - a_k(m-1))^2, \quad (93)$$

com

$$\psi = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^r (\alpha_j - \alpha_{j-1})^2. \quad (94)$$

Comparando (85) e (93), observa-se que

$$R(k+1) = \psi R(k). \quad (95)$$

De (78), a condição inicial para a equação de diferenças (95) é  $R(0) = P_{\text{med}} = 1/3$ . Resolvendo (95) com essa condição inicial, obtém-se a expressão geral

$$R(k) = \frac{1}{3} \psi^{|k|}, \quad (96)$$

para qualquer inteiro  $k$ . Chama a atenção a forma compacta desse resultado e a semelhança com (71). Para o mapa  $f_B(\cdot)$ ,  $\psi$  substitui formalmente o parâmetro  $\alpha$  do mapa  $f_I(\cdot)$ .

### 3.3.2 Densidade espectral de potência

Aplicando-se a TFTD a ambos os membros de (96) obtém-se

$$S(\omega) = \frac{1 - \psi^2}{3(1 + \psi^2 - 2\psi \cos(\omega))}, \quad (97)$$

que tem a mesma forma de (74). No entanto, diferentemente do que ocorre com  $\alpha$  no mapa  $f_I(\cdot)$ , o parâmetro  $\psi$  é sempre positivo, como se conclui de (94). Consequentemente,  $S(\omega)$  tem máximo em  $\omega = 0$  e mínimo em  $\omega = \pi$  para quaisquer  $r$  e  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq r-1$ , resultando em sinais passa-baixas para todos os mapas da família.

### 3.3.3 Banda essencial

Procedendo de forma análoga ao que foi feito na Seção 3.2.3, obtém-se

$$B = 2 \arctan \left( \tan \left( \frac{p\pi}{2} \right) \left| \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \right| \right). \quad (98)$$

### 3.3.4 Conclusões

Os resultados fechados obtidos para o mapa  $f_B(\cdot)$ , expressos em (96), (97) e (98) foram possíveis pela estrutura linear por partes desses mapas e pela sua densidade invariante uniforme.

Para esse mapa, diferentemente do que ocorre com  $f_I(\cdot)$ , todos os conjuntos de parâmetros levam a DEPs concentradas nas baixas frequências. Essa diferença ocorre basicamente porque todos os segmentos de  $f_B(\cdot)$ , da forma como ele foi definido, apresentam inclinação positiva.

Está em fase de finalização um trabalho em que se estuda a DEP de um mapa semelhante a  $f_B(\cdot)$ , mas que também permita inclinações negativas. Esse novo mapa é uma generalização que inclui  $f_B(\cdot)$  e  $f_I(\cdot)$  e os resultados deverão ser publicados em breve.

## 4 Conclusões, pesquisas em andamento e trabalhos futuros associados

Neste texto apresentou-se resultados associados a determinação da SAC e DEP para sinais caóticos. Inspirando-se em técnica utilizada por [42], obteve-se fórmulas fechadas para a DEP das órbitas dos mapas  $f_I(\cdot)$  e  $f_B(\cdot)$  em função de seus parâmetros.

Esses resultados, além da relevância matemática, tem um interesse prático importante. Como discutido na introdução, não se pode projetar um sistema de comunicação sem se conhecer a banda essencial dos sinais envolvidos. Assim, a viabilidade de qualquer sistema de comunicação baseado em caos passa necessariamente pela precisa definição e determinação da DEP de sinais caóticos. Os trabalhos de pesquisa seguem nessa área, em várias frentes, resumidas a seguir.

## A. Generalizações para mapas lineares por partes mais gerais

Desde o início das pesquisas envolvendo o mapa  $f_I(\cdot)$ , tem-se buscado caminhar no sentido de generalizar os resultados para mapas lineares por parte quaisquer. O próximo passo, que está atualmente em fase de finalização, é propor um mapa que admita  $f_I(\cdot)$  e  $f_B(\cdot)$  como casos particulares. Dessa forma, ele tem um número arbitrário de segmentos que se estendem por toda a imagem do mapa, com inclinações positivas ou negativas. Novamente, a densidade invariante uniforme torna o problema tratável.

O próximo passo seria passar a mapas lineares por parte gerais no intervalo  $[-1,1]$ . Nesse caso, a situação parece mais delicada já que as órbitas não tem necessariamente densidade invariante uniforme. Na verdade, podem nem ter uma densidade invariante bem definida.

## B. Uso da representação linear de caos

Drake e Williams [34] propuseram uma representação alternativa para sinais caóticos de tempo discreto. Ao invés de utilizar mapas não lineares, eles mostraram que é possível gerar sinais caóticos a partir de filtros lineares não causais alimentados por sequências aleatórias. Esse resultado surpreendente pode ser útil na determinação da DEP desses sinais. Conhecendo-se o sistema linear equivalente a um dado mapa, é possível utilizar a resposta em frequência do filtro e a DEP da sequência aleatória de entrada juntamente com a teoria de sistemas lineares [52, Cap. 8] para se obter a DEP do sinal caótico gerado.

Essa abordagem, que parece inédita, pode gerar resultados interessantes. Por exemplo, utilizando os filtros propostos em [34], já obteve-se uma expressão para a DEP do mapa  $f_B(\cdot)$  com  $r$  segmentos de inclinações iguais.

## C. Mapas com outras não linearidades e multidimensionais

Uma vez que se tenha conseguido obter expressões fechadas para famílias de mapas lineares unidimensionais, o próximo alvo são os mapas com não linearidades mais gerais e mapas multidimensionais.

O autor em conjunto com seus orientados e colegas explorou numericamente alguns casos, como o mapa de Manneville [53], o mapa quadrático [36] e o mapa de Hénon [54].

Uma possibilidade que está em estudo para se obter resultados analíticos é usar aproximações lineares por trechos para mapas gerais. Em particular, algumas experiências numéricas iniciais com mapas quadráticos mostraram que essas aproximações, no limite, mantém propriedades temporais e espectrais das órbitas geradas [36].

## D. Aplicações

Uma vez bem definida e determinada a DEP de sinais caóticos, pode-se passar ao problema de determinar analiticamente a banda ocupada pelos sinais transmitidos por diversos sistemas de comunicação baseados em caos. Em sistemas que transmitem trechos de sinais caóticos associados a cada símbolo, como a comutação caótica (CSK - *Chaos-Shift Keying*) e a CSK diferencial (DCSK - *Differential CSK*) [55], sabendo-se a DEP do GSC, pode-se utilizar a teoria de comunicações para obter a banda do sinal transmitido, como se faz usualmente em sistemas de comunicação digital convencionais [44, Cap. 7].

Além disso, pode-se pensar o problema no outro sentido: dado uma banda essencial que o sistema deverá ocupar, projetar os mapas a serem utilizados de forma a se garantir que a DEP dos sinais transmitidos não ultrapassem essa banda.

São problemas ainda em estudo e que, como já escrito, fundamentais quando se pensa em possíveis implementações práticas de sistemas de comunicação baseados em caos. Uma outra possibilidade de aplicação prática da obtenção da DEP de sinais caóticos é utilizar sua medida na estimação de uma grandeza associada com o mapa ou com o modelo que ele representa. Por exemplo, em [53] usa-se a banda essencial para estimar o intervalo entre intermitências e o parâmetro do mapa de Manneville [56]. Espera-se que todas essas possibilidades gerem resultados relevantes nos próximos anos.

## REFERÊNCIAS

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer and J. A. Yorke. *Chaos*. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer New York, 2000.
- [2] L. M. Pecora and T. L. Carroll. "Synchronization in chaotic systems". *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pp. 821–824, feb 1990.
- [3] E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke. "Controlling chaos". *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 11, pp. 1196–1199, mar 1990.
- [4] M. P. Kennedy, G. Setti and R. Rovatti, editors. *Chaotic Electronics In Telecommunications*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2000.
- [5] M. P. Kennedy and G. Kolumbán. "Digital communications using chaos". *Signal Processing*, vol. 80, no. 7, pp. 1307–1320, jul 2000.
- [6] S. Tsekeridou, V. Solachidis, N. Nikolaidis, A. Nikolaidis, A. Tefas and I. Pitas. "Statistical analysis of a watermarking system based on Bernoulli chaotic sequences". *Signal Processing*, vol. 81, no. 6, pp. 1273–1293, jun 2001.

- [7] F. C. M. Lau and C. K. Tse. *Chaos-Based Digital Communication Systems*. Springer-Verlag GmbH, Berlin, 2003.
- [8] P. Stavroulakis, editor. *Chaos Applications in Telecommunications*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2005.
- [9] M. Eisenkraft, R. R. F. Attux and R. Suyama, editors. *Chaotic Signals in Digital Communications (Electrical Engineering & Applied Signal Processing Series)*. CRC Press, 2013.
- [10] G. Kaddoum. “Wireless Chaos-Based Communication Systems: A Comprehensive Survey”. *IEEE Access*, vol. 4, pp. 2621–2648, 2016.
- [11] X. Li, C. Li and I.-K. Lee. “Chaotic image encryption using pseudo-random masks and pixel mapping”. *Signal Processing*, vol. 125, pp. 48–63, aug 2016.
- [12] L. M. Pecora and T. L. Carroll. “Synchronization of chaotic systems”. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 25, no. 9, pp. 097611, sep 2015.
- [13] L. H. A. Monteiro, A. C. Lisboa and M. Eisenkraft. “Route to chaos in a third-order phase-locked loop network”. *Signal Processing*, vol. 89, no. 8, pp. 1678–1682, aug 2009.
- [14] R. de F. Attux and J. Romano. “Chaotic phenomena in adaptive blind equalisers”. *IEE Proceedings - Vision, Image, and Signal Processing*, vol. 150, no. 6, pp. 360, 15 2003.
- [15] T. Endo and L. Chua. “Chaos from phase-locked loops”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 35, no. 8, pp. 987–1003, Aug 1988.
- [16] B. A. Harb and A. Harb. “Chaos and bifurcation in a third-order phase locked loop”. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 19, no. 3, pp. 667–672, feb 2004.
- [17] M. S. Tavazoei and M. Haeri. “Chaos in the APFM nonlinear adaptive filter”. *Signal Processing*, vol. 89, no. 5, pp. 697–702, may 2009.
- [18] S. Haykin and M. Moher. *Communication Systems*. John Wiley & Sons Inc., fifth edition, 2009.
- [19] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. García-Ojalvo, C. R. Mirasso, L. Pesquera and K. A. Shore. “Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links”. *Nature*, vol. 438, no. 7066, pp. 343–346, nov 2005.
- [20] D. Syvridis. “Optical chaos encoded communications: Solutions for today and tomorrow”. In *2009 IEEE LEOS Annual Meeting Conference Proceedings*, IEEE Lasers and Electro-Optics Society (LEOS) Annual Meeting, pp. 759–760. IEEE Photon Soc, IEEE, oct 2009.
- [21] S. Lee, Y. Kim and A. Dmitriev. “Method for direct chaotic communications with predetermined spectral mask”, February 14 2012. US Patent 8,116,352.
- [22] A. Michaels and C. David. “Adaptive link communications using adaptive chaotic spread waveform”, February 5 2013. US Patent 8,369,377.
- [23] O. Michel and P. Flandrin. “Application of methods based on higher-order statistics for chaotic time series analysis”. *Signal Processing*, vol. 53, no. 2-3, pp. 133–148, sep 1996.
- [24] M. Eisenkraft and D. M. Kato. “Spectral properties of chaotic signals with applications in communications”. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 71, no. 12, pp. e2592–e2599, dec 2009.
- [25] M. Eisenkraft, D. M. Kato and L. H. A. Monteiro. “Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map”. *Signal Processing*, vol. 90, no. 1, pp. 385–390, jan 2010.
- [26] R. A. Costa, M. B. Loiola and M. Eisenkraft. “Spectral Properties of Chaotic Signals Generated by the Bernoulli Map”. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, vol. 8, no. 2, pp. 12–16, 2015.
- [27] R. A. Costa, M. B. Loiola and M. Eisenkraft. “Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments”. *Signal Processing*, vol. 133, pp. 187–191, apr 2017.
- [28] A. Lasota and M. C. Mackey. *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*. Cambridge University Press, 1985.
- [29] M. Eisenkraft. “Sistemas de Comunicação Utilizando Sinais Caóticos”. Master’s thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2001.
- [30] M. Eisenkraft. “Contribuições da teoria da estimação para modulações digitais que utilizam sinais caóticos”. Ph.D. thesis, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2006.

- [31] D. C. Soriano, F. I. Fazanaro, R. Suyama, J. R. Oliveira, R. Attux and M. K. Madrid. “A method for Lyapunov spectrum estimation using cloned dynamics and its application to the discontinuously-excited FitzHugh-Nagumo model”. *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, no. 1, pp. 413–424, mar 2011.
- [32] T.-Y. Li and J. A. Yorke. “Period Three Implies Chaos”. *The American Mathematical Monthly*, vol. 82, no. 10, pp. 985, dec 1975.
- [33] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley studies in nonlinearity. Westview, 2003.
- [34] D. F. Drake and D. B. Williams. “Linear, Random Representations of Chaos”. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 4, pp. 1379–1389, apr 2007.
- [35] A. Kisel, H. Dedieu and T. Schimming. “Maximum likelihood approaches for noncoherent communications with chaotic carriers”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 48, no. 5, pp. 533–542, may 2001.
- [36] R. A. Costa. “Caracterização Temporal e Espectral de Sinais Caóticos Gerados por Mapas Unidimensionais”. Master’s thesis, Universidade Federal do ABC - Mestrado em Engenharia da Informação, 2015.
- [37] M. Hénon. “A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor”. *Communications in Mathematical Physics*, vol. 50, pp. 94–102, 1976.
- [38] K. Ikeda. “Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system”. *Optics Communications*, vol. 30, no. 2, pp. 257 – 261, 1979.
- [39] R. Candido, D. C. Soriano, M. T. M. Silva and M. Eisenkraft. “Do chaos-based communication systems really transmit chaotic signals?”. *Signal Processing*, vol. 108, no. 0, pp. 412–420, mar 2015.
- [40] D. L. Hitzl and F. Zele. “An exploration of the Hénon quadratic map”. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 14, no. 3, pp. 305–326, mar 1985.
- [41] G. Setti, G. Mazzini, R. Rovatti and S. Callegari. “Statistical modeling of discrete-time chaotic processes-basic finite-dimensional tools and applications”. *Proceedings of the IEEE*, vol. 90, no. 5, pp. 662–690, may 2002.
- [42] H. Sakai and H. Tokumaru. “Autocorrelations of a certain chaos”. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 28, no. 5, pp. 588–590, oct 1980.
- [43] P. Stoica and R. L. Moses. *Spectral Analysis of Signals*. Prentice Hall, 2005.
- [44] B. P. Lathi and Z. Ding. *Modern Digital and Analog Communication Systems (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering)*. The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering. Oxford University Press, 2009.
- [45] H. Papadopoulos and G. Wornell. “Maximum-likelihood estimation of a class of chaotic signals”. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 41, no. 1, pp. 312–317, Jan 1995.
- [46] A. V. Oppenheim. *Sinais e Sistemas*. Pearson, 2010.
- [47] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Addison Wesley Pub CO Inc, Upper Saddle River, NJ, USA, third edition, 2009.
- [48] D. M. Kato and M. Eisenkraft. “On the Power Spectral Density of Chaotic Signals Generated by Skew Tent Maps”. In *2007 International Symposium on Signals, Circuits and Systems*, volume 1, pp. 1–4. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), jul 2007.
- [49] D. M. Kato and M. Eisenkraft. “Caracterização espectral de sinais caóticos”. In *Anais do XXV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT’07)*, volume 1, pp. 1–5. Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2007.
- [50] K. Feltekh, Z. B. Jemaa, D. Fournier-Prunaret and S. Belghith. “Border collision bifurcations and power spectral density of chaotic signals generated by one-dimensional discontinuous piecewise linear maps”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, no. 8, pp. 2771–2784, aug 2014.
- [51] K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret and S. Belghith. “Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes”. *Signal Processing*, vol. 94, no. 0, pp. 149–157, jan 2014.
- [52] P. Peebles. *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2000.
- [53] D. M. Kato and M. Eisenkraft. “Análise Espectral de órbitas do Mapa de Maneville”. In *Anais do 8o Congresso Brasileiro de Dinâmica, Controle e Aplicações DINCON’09*, pp. 1–7, Baurú, 2009. SBMAC e UNESP.

- [54] R. A. Costa and M. Eisencraft. “Spectral properties of the orbits of the Hénon map”. In *Proceedings of the 6th International Conference on Nonlinear Science and Complexity*, pp. 1–3. SWGE Sistemas, 2016.
- [55] G. Kolumban, M. Kennedy and L. Chua. “The role of synchronization in digital communications using chaos. II. Chaotic modulation and chaotic synchronization”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 45, no. 11, pp. 1129–1140, 1998.
- [56] Y. Pomeau and P. Manneville. “Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems”. *Communications in Mathematical Physics*, vol. 74, no. 2, pp. 189–197, jun 1980.