

# Ferramentas para Análise de Sistemas Caóticos de Tempo Discreto: Um Breve Tutorial

**José Maria Pires de Menezes Júnior**

Departamento de Engenharia Elétrica

Universidade Federal do Piauí

josemenezesjr@ufpi.edu.br

**Resumo** – O presente artigo tem por objetivo primeiro apresentar ao leitor iniciante conceitos fundamentais para análise e caracterização de sistemas dinâmicos de tempo discreto, em particular os chamados sistemas caóticos. A tarefa alvo do artigo é a reconstrução de atratores estranhos a partir do Teorema de Takens, de modo que serão apresentadas técnicas para estimação da dimensão e do atraso de imersão. Em seguida, uma caracterização de sistemas caóticos é introduzida a partir da identificação das propriedades elementares deste tipo de sistema dinâmico, tais como ser limitado em amplitude, não linearidade, previsibilidade e elevada sensibilidade às condições iniciais. O tutorial é ricamente ilustrado com exemplos e discussões.

**Palavras-chave** – Sistemas caóticos de tempo discreto, reconstrução de atratores, teorema de Takens, sensibilidade às condições iniciais, determinismo.

**Abstract** – The main goal of the current paper is to present to the reader fundamental concepts on the analysis and characterization of discrete-time dynamical systems, in particular those presenting chaotic features. The target task is the reconstruction of strange attractors based on Takens' Theorem, with focus on the estimation of the embedding dimension and delay. Then, the characterization of chaotic systems is discussed from the point of view of elementary typical properties of that kind of dynamical system, such as boundedness, nonlinearity, predictability and sensitivity to initial conditions. The tutorial is rich in examples and discussion.

**Keywords** – Discrete-time chaotic systems, attractor reconstruction, Takens' theorem, sensitivity to initial conditions, determinism.

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo sistemático de fenômenos não-lineares, em particular os caóticos, tem sua origem por volta da década de 1960. Uma possível razão para este interesse tardio reside no fato do cenário de análise de sistemas ser dominado por técnicas lineares, seja na Matemática Aplicada ou na Engenharia. Além disso, a maioria das ferramentas de análise de sistemas caóticos dependem do intenso uso dos computadores digitais, que por sua vez se tornaram do uso mais difundido somente a partir do final da década de 70.

Em consequência do baixo poder computacional dos primeiros computadores, o comportamento irregular de certos sistemas determinísticos não-lineares não era avaliado em sua totalidade e quando tal comportamento era manifestado em observações, era explicado tipicamente como estocástico [1]. Isto é, todo comportamento irregular de um sistema atribuíam-se à alguma entrada externa aleatória ao sistema. Mais recentemente, a teoria do caos advoga que entradas aleatórias não são as únicas fontes possíveis de irregularidade na saída de um sistema. Desta forma, sistemas dinâmicos não-lineares de pequena ordem podem produzir sinais muito irregulares, a partir de equações não-lineares puramente determinísticas [2].

Um exemplo de um sistema não-linear bastante simples, com apenas um parâmetro, conhecido como mapa logístico, produz uma série temporal, cuja função de autocorrelação se assemelha a de uma sequência de ruído branco [1], quando na verdade corresponde a uma série temporal caótica. Devido a esta curiosa, porém falsa, semelhança com processos estocásticos lineares, muitas séries temporais caóticas costumam ser tratadas a partir de modelos lineares convencionais, tal como o modelo autoregressivo com médias móveis (*autoregressive moving average*, ARMA). Contudo, tais modelos têm se mostrado inadequados para a análise e previsão de sistemas caóticos, pois não capturam a dinâmica não-linear subjacente à série temporal de interesse. Posto de maneira mais formal, isto se deve ao fato de que modelos lineares conduzem somente a soluções exponencialmente decrescentes ou periodicamente oscilantes, chamadas genericamente de pontos ou soluções de equilíbrio. Sistemas caóticos apresentam outras possíveis soluções ou comportamentos que só são obtidos quando se usa as ferramentas e modelos não-lineares adequados.

Os principais artigos que serviram de referência para o estudo das ferramentas descritas neste capítulo são 1, 3–5. Dentre os livros consultados destacam-se os de 6, 2, 7 e 8.

## 2 Sistemas Dinâmicos Não-Lineares: Uma Breve Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos caóticos pode ser dividido em três áreas fundamentais: (i) identificação do comportamento caótico, (ii) modelagem e previsão da dinâmica de sistemas caóticos, e por fim, (iii) controle de sistemas caóticos [1].

A primeira área tem como principal objetivo classificar um certo sistema com comportamento (dinâmica) irregular como sendo um sistema caótico ou como um sistema estocástico; ao mesmo tempo, fornece estimativas de graus de liberdade e de complexidade do sistema caótico [1]. A segunda área se divide ainda em duas sub-áreas: reconstrução da dinâmica do sistema caótico, a partir de observações, e caracterização da dinâmica reconstruída<sup>1</sup>. A terceira relaciona-se com a capacidade de obter uma resposta específica para um certo sistema dinâmico, tornando-o sensível, porém estável, a sinais de entrada semelhantes aqueles observados quando o sistema está com comportamento caótico. O objetivo é fazer com que o sistema possa ser levado a produzir a resposta desejada sem muito esforço.

Este artigo está concentrado nas duas primeiras áreas mencionadas no parágrafo anterior. A reconstrução dinâmica por sua vez é avaliada por várias ferramentas, principalmente as que se baseiam na análise de sinais gerados por sistemas dinâmicos caóticos. Tais sinais, por serem observados (amostrados) em intervalos de tempo discreto, são comumente chamados de séries temporais caóticas.

Uma série temporal é representada de forma genérica como uma sequência finita de valores de uma certa variável  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\{x(1), x(2), \dots, x(N)\}$  ou  $\{x(n)\}_{n=1}^N$ , em que  $N$  representa a quantidade de amostras observadas. Uma série temporal caótica pode ser entendida grosseiramente como a parte mensurável da saída de um sistema dinâmico não-linear, cujo comportamento caótico se deseja compreender. Esta série temporal é, assim, uma das poucas (se não a única!) fonte de informação disponível sobre o sistema dinâmico de interesse e é a partir dela que o comportamento caótico do sistema deve ser inferido. Assim, quando se fala em analisar uma série temporal caótica se está, na verdade, tentando entender como o comportamento irregular de tal série temporal reflete a dinâmica do sistema caótico que lhe dá origem.

Ferramentas de análise de séries temporais discutidos neste artigo são oriundas, em sua maioria, da teoria de sistemas dinâmicos [2, 8], sendo por isto necessário apresentar certos conceitos básicos desta teoria antes de iniciar a análise de séries temporais propriamente dita.

## 2.1 Conceitos Básicos

O espaço de estados ou espaço de fase de um sistema dinâmico é definido como o espaço formado pelas variáveis dependentes  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , associadas a um dado sistema dinâmico. Desta forma, um ponto no espaço de estados, corresponde ao vetor de variáveis estados,  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ . De modo geral, o espaço de estados forma um conjunto aberto no  $\mathbb{R}^m$ . Todavia, em certos casos, a topologia do espaço pode estar restrita a uma superfície geométrica de forma particular, tais como cilíndrica ou toroidal. Topologicamente, diz-se que este espaço é uma variedade (*manifold*) [9].

Pode-se descrever a evolução temporal da variável  $\mathbf{x}$  no espaço de estados ou por um mapa<sup>2</sup>  $m$ -dimensional ou por um sistema de  $m$  equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Tanto mapas discretos, quanto sistemas de equações diferenciais servem para descrever matematicamente como o vetor de estado varia com o passar do tempo, ou seja, qual é a dinâmica do sistema. Para simplificar, considera-se que o espaço de estados é um espaço vetorial de dimensão finita  $\mathbb{R}^m$ .

No caso da dinâmica do sistema ser descrita por mapas, o tempo é uma variável discreta, sendo denotada por  $n$ . Assim, a dinâmica é descrita como

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(n)), \quad (1)$$

em que  $\mathbf{F}(\cdot)$  é uma função não-linear de seu argumento. Esta equação relaciona matematicamente o estado futuro do sistema com o estado atual. Equações deste tipo, que relacionam grandezas em instantes de tempo discreto, são chamadas genericamente de equações a diferenças-finitas.

Caso a dinâmica seja representada por equações diferenciais, tem-se que a variável tempo é uma grandeza contínua, denotada por  $t$ . Neste caso, a dinâmica da variável de estado  $x_i$  é descrita por

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = f_i(x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Pode-se escrever este sistema de equações em uma forma compacta utilizando-se notação vetorial, dado por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (3)$$

em que  $\mathbf{f}(\cdot)$  também é uma função não-linear de seu argumento. Pode-se dizer que  $\mathbf{x}(t)$  é um caminho no espaço de estados percorrido com velocidade  $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)$ , que coincide, em cada ponto, com o campo de velocidades  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ . Esta forma de representação é usualmente referida como fluxo. Se  $\mathbf{f}(\cdot)$  é explicitamente dependente de  $t$ , ou seja,  $d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ , pode-se chamar o sistema dinâmico de não-autônomo; caso contrário, ele é autônomo, como na Equação (3) [6].

Uma sequência de pontos  $\mathbf{x}(n)$  ou  $\mathbf{x}(t)$  obtidos a partir da solução das Equações (1) e (3) é chamada trajetória de um sistema dinâmico, sendo  $\mathbf{x}(0)$  sua condição inicial. Uma trajetória pode evoluir rumo ao infinito com o tempo, sendo chamada por isto de solução instável, ou permanece restrita a uma área (subespaço) para sempre. Se a trajetória convergir para um único estado (ponto) no espaço de estados, tal que  $\mathbf{x}^* = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$ , o ponto  $\mathbf{x}^*$  é chamado de ponto de equilíbrio. Outra possível solução de equilíbrio, muito comum em sistemas dinâmicos, é conhecida como ciclo-limite, em que, em vez de um único ponto de equilíbrio, tem-se uma trajetória (conjunto de pontos) que se repete periodicamente.

<sup>1</sup>Por caracterização entende-se o ato de calcular certas grandezas invariantes que identificam o processo como caótico.

<sup>2</sup>Em português, o termo *map* costuma ser também traduzido como *mapeamento* ou *aplicação*. O primeiro termo é usado nas Engenharias de Controle e de Telecomunicações, enquanto o último termo é muito usado por Matemáticos.

A expressão matemática de  $F(\cdot)$  ou  $f(\cdot)$ , seus parâmetros associados e as condições iniciais são os fatores que decidem qual é o comportamento assintótico resultante para uma certa trajetória. Um conjunto de condições iniciais que conduzem ao mesmo atrator define a bacia de atração daquele atrator [1]. Sistemas dinâmicos que apresentam comportamento caótico não possuem pontos de equilíbrio ou ciclos-limites, muito embora as trajetórias sempre convirjam para uma “região limitada” do espaço de estados, independente da condição inicial, de tal forma que os pontos da trajetórias nunca se repetem. Dá-se o nome de atrator estranho à trajetória desenhada no espaço de estados por um sistema dinâmico caótico.

A formulação de tempo discreto é mais conveniente para processamento em computadores digitais, o que resulta na geração de várias séries temporais, uma para cada variável  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Um sistema dinâmico de tempo contínuo, descrito como na Equação (3), pode ser facilmente discretizado e transformado em um mapa discreto. Por exemplo, usando a equação de Euler para aproximação da derivada de primeira ordem chega-se ao seguinte resultado:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \approx \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \Rightarrow \mathbf{x}(t + \Delta t) \approx \mathbf{x}(t) + \Delta t \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (4)$$

em  $0 < \Delta t \leq 1$  é chamado de passo de amostragem e define o grau de discretização da equação. De modo geral, quanto menor for  $\Delta t$ , menor é a diferença entre valores consecutivos  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{x}(t + \Delta t)$  e melhor é a aproximação do fluxo pelo mapa discreto equivalente.

### 3 Reconstrução do Espaço de Estados

A idéia básica da reconstrução do espaço de estado está calcada no fato de que a série temporal de uma certa variável de estado  $x_i$  contém informações sobre as outras variáveis de estado não-observáveis, podendo ser usadas para prever o vetor de estado atual  $\mathbf{x}(n)$ . Ao processo de previsão do vetor de estados, a partir de uma única série temporal, dá-se o nome de reconstrução do espaço de estados [2, 5, 8].

A reconstrução do espaço de estado está baseada no Teorema da Imersão de Takens (*Takens' embedding theorem*) [10]. Este teorema permite reconstruir um espaço de estado  $d_E$ -dimensional similar ao espaço de estado original, a partir de uma única variável de estado, que é a variável medida. Este espaço reconstruído deve preservar as propriedades invariantes do sistema dinâmico subjacente [9].

De modo geral, o teorema de Takens é posto da seguinte maneira. Seja uma série temporal de tamanho  $N$  (suficientemente grande) e livre de ruído,  $\{x(1), x(2), \dots, x(N)\}$ , obtida a partir de uma das variáveis de um sistema dinâmico determinístico. O espaço de estados deste sistema pode ser exatamente reconstruído por um grupo de vetores, chamados coordenadas de atraso, montados a partir de amostras atrasadas daquela série temporal da seguinte forma

$$\mathbf{x}(n) = [x(n) \quad x(n - \tau) \quad x(n - 2\tau) \quad \dots \quad x(n - (d_E - 1)\tau)]^T, \quad (5)$$

em que  $x(n)$  é a amostra da série temporal no tempo  $n$ ,  $d_E$  é chamada de dimensão de imersão (*embedding dimension*) e  $\tau$  é chamado de atraso de imersão (*embedding delay*). Uma idéia semelhante ao teorema de Takens é proposta originalmente no trabalho de [11], tal que costuma-se referir a ela também como “Teorema de Whitney” porque ele é o primeiro a provar que uma variedade suave (*smooth manifold*) de dimensão  $n$  pode ser imersa em  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

O teorema de Takens é um importante teorema porque implica na seguinte constatação: se as suposições gerais do teorema são satisfeitas, existe uma função  $g(\cdot)$ , tal que,  $x(n + 1) = g(\mathbf{x}(n))$ . Ou seja, se as coordenadas de atraso  $\mathbf{x}(n)$ , montadas como na Equação (5), reconstróem com exatidão o espaço de estados, então existe uma função  $g(\cdot)$  que gera a variável de estado  $x(n + 1)$  com exatidão. Contudo, como esta função é geralmente desconhecida, o problema de reconstrução do espaço de estados pode intuitivamente ser colocado como um problema de previsão de séries temporais, no qual o objetivo é determinar os valores futuros da variável observada, ou seja,

$$\hat{x}(n + 1) = \hat{g}(\mathbf{x}(n)), \quad (6)$$

em que  $\hat{x}(n + 1)$  é uma estimativa do valor exato de  $x(n + 1)$  e  $\hat{g}(\cdot)$  denota uma aproximação da função  $g(\cdot)$ . Assim, conclui-se que um bom modelo computacional para a aproximação  $\hat{g}(\cdot)$ , resulta em uma reconstrução fidedigna do espaço de estados, pois os valores preditos para  $\hat{x}(n + 1)$  são próximos dos valores exatos.

#### 3.1 Estimação da Dimensão de Imersão

A dimensão de imersão  $d_E$  do espaço de estados reconstruído é um importante parâmetro a ser determinado. Geralmente ela é diferente da dimensão exata (e desconhecida) do espaço de estados,  $m = [d] + 1$ , em que  $[d]$  significa a parte inteira da dimensão fractal do atrator  $d$ . [10] mostra ser suficiente que  $d_E \geq 2[d] + 1$ . O teorema garante que o atrator imerso no espaço de estado  $d_E$ -dimensional é desdobrado (*unfolded*) sem qualquer auto-interseções. A condição  $d_E \geq 2[d] + 1$  é suficiente mas não é necessária, e um atrator pode ser reconstruído também na prática, com uma dimensão de imersão tão baixa quanto  $[d] + 1$  [1]. Nos próximos parágrafos são descritos métodos para estimar a dimensão de imersão  $d_E$ , a partir de uma série temporal com ou sem ruído.

**Cálculo de invariantes geométricos.** Este método baseia-se na tentativa de encontrar um valor assintótico de alguma invariante geométrica (e.g. dimensão de correlação) do sistema dinâmico em função do valor da dimensão de imersão. Assim, quando o invariante geométrico calculado estabilizar em um determinado valor, o valor escolhido para a dimensão de imersão é o menor valor para o qual aquele invariante estabiliza.

**Decomposição em valores singulares.** Este método é baseado na diagonalização da matriz de covariância dos vetores de reconstrução, identificando os seus autovalores. O número de autovalores não-nulos é um valor estimado da dimensão mínima de imersão.

**Método dos falsos vizinhos (*False Neighbors*).** Este método baseia-se no fato de que em um atrator bem reconstruído não deve haver cruzamento de uma trajetória consigo mesma; ou seja, pontos não devem se repetir, uma vez que a dinâmica é caótica. Assim, avalia-se um vizinho como “verdadeiro” ou “falso” apenas em virtude da projeção do sistema em uma determinada dimensão. Desta forma, um falso vizinho é um ponto do sinal que só corresponde a um vizinho devido a observação das órbitas em um espaço muito pequeno,  $D < d_E$ . Quando o espaço está imerso em uma dimensão  $D > d_E$ , todos os pontos vizinhos de todas as órbitas são vizinhos verdadeiros.

**Método de Cao.** Este método, descrito por [12], é uma extensão da técnica anterior, sendo voltada para aplicações em séries temporais estocásticas ou determinísticas. Este método também é pouco sensível ao tamanho da série em questão. O procedimento consiste em explorar a estrutura geométrica do atrator à medida que se aumenta o valor de  $d_E$ , a partir de 1. Se  $d_E$  é muito pequeno, o atrator apresenta auto-intersecções da trajetória do atrator no espaço de estados. Nestes casos, pontos próximos no atrator são, ou vizinhos exatos devido à dinâmica do sistema, ou falsos vizinhos devido às auto-intersecções. Em dimensões maiores, em que as auto-intersecções são desfeitas, os falsos vizinhos são revelados visto que eles vão se distanciando. O objetivo do método de Cao é encontrar um limiar mínimo para  $d_E$ , tal que não existam falsos vizinhos no atrator reconstruído a partir desta dimensão de imersão.

Pode-se estimar a dimensão de imersão através do Método de Cao usando a seguinte definição (12):

$$a(t, d) = \frac{\|\mathbf{y}_t(d+1) - \mathbf{y}_{n(t,d)}(d+1)\|}{\|\mathbf{y}_t(d) - \mathbf{y}_{n(t,d)}(d)\|}, \quad t = 1, 2, \dots, N - d\tau. \quad (7)$$

Onde:

- o vetor  $\mathbf{y}_t(d+1)$  é o  $t$ -ésimo vetor de reconstrução com dimensão  $d+1$ ,

$$\mathbf{y}_t(d) = [x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+d\tau)]. \quad (8)$$

- O número inteiro  $n(t, d)$ ,  $1 \leq n(t, d) \leq N - d\tau$ , é tal que  $\mathbf{y}_{n(t,d)}(d)$  é o vizinho mais próximo de  $\mathbf{y}_t(d)$  no espaço de fase  $d$ -dimensional reconstruído, no sentido determinado pela função distância  $\|\cdot\|$ .
- A função distância  $\|\cdot\|$  é definida como a norma máxima de seu argumento, ou seja,

$$\|\mathbf{y}_k(m) - \mathbf{y}_l(m)\| = \max_{0 \leq j \leq m-1} |x(k+j\tau) - x(l+j\tau)|. \quad (9)$$

É importante fazer algumas observações sobre os componentes da Equação 7 antes de continuar a apresentação do método de Cao:

1. O número inteiro  $n(t, d)$  que aparece no numerador desta equação é o mesmo que o do denominador.
2. Se  $\mathbf{y}_{n(t,d)}(d)$  é igual a  $\mathbf{y}_t(d)$ , toma-se o segundo vizinho mais próximo em seu lugar.
3. Se  $d$  é qualificada como uma dimensão de imersão pelos teoremas de [10], então dois pontos que estão próximos no espaço de fases  $d$ -dimensional reconstruído, permanecerão próximos no espaço de fases  $d+1$ -dimensional. Tal par de pontos são chamados de “vizinhos verdadeiros”, caso contrário são “vizinhos falsos”. Esta é a idéia subjacente ao método dos “vizinhos falsos”, proposto por [3].

O método de Cao se baseia na definição do valor médio de todos os  $a(t, d)$ 's, ou seja,

$$E(d) = \frac{1}{N - d\tau} \sum_{t=1}^{N-d\tau} a(t, d), \quad (10)$$

onde  $E(d)$  depende apenas da dimensão  $d$  e do passo  $\tau$ . Para investigar a variação de  $E(d)$  quando a dimensão aumenta de  $d$  para  $d+1$ , define-se a seguinte quantidade:

$$E_1(d) = \frac{E(d+1)}{E(d)}. \quad (11)$$

Cao verificou que  $E_1(d)$  para de variar quando  $d$  é maior que um certo valor  $d_0$  se a série provém de um atrator. Assim, o valor  $d_0$  é tomado como a mínima dimensão de imersão.

### 3.2 Estimação do Atraso de Imersão

Embora  $10$  não tenha considerado este parâmetro relevante na sua formulação original, em séries temporais reais, que não estão livres de ruído (muito pelo contrário!), ele se torna em um parâmetro da maior importância. Para  $\tau$  demasiado pequeno, coordenadas de atraso  $x(n)$  consecutivas tornam-se similares, de tal forma que o atrator reconstruído é esticado ao longo de uma diagonal e obscurecido facilmente pelo ruído. Assim, é desejável uma escolha de  $\tau$  que mantenha coordenadas de atrasos consecutivas mais independentes entre si. Por outro lado, valores demasiado grandes causam perda de informação contida nos dados, tal que dois vetores, temporalmente próximos, tornam-se bastante afastados, dando origem a incertezas na reconstrução [1].

Uma das principais ferramentas para a estimação de independência entre termos é a função de autocorrelação temporal (FAC), cuja expressão, para um sinal de média zero, é dada por

$$R_X(k) = \frac{\sum_{n=1}^{N-k} x(n)x(n+k)}{N-k}, \quad (12)$$

em que o parâmetro  $k \geq 0$  é separação temporal (*lag*) entre as amostras. A FAC é uma medida quantitativa da dependência temporal entre amostras sucessivas de uma série temporal, propriedade esta associada com a presença de “memória” no sistema. Uma série temporal, em que  $R_X(k) \neq 0$  para  $k = 0$ , e  $R_X(k) \approx 0$  para  $k > 0$ , é típica de sistemas sem memória, de modo que tal sequência é chamada genericamente de ruído branco.

Uma formulação alternativa da FAC, chamada de função coeficiente de autocorrelação (FCAC), divide a Equação (12) pela variância amostral  $\sigma_X^2 = R_X(0)$  da série, resultando na seguinte expressão

$$\rho_X(k) = \frac{R_X(k)}{R_X(0)} \approx \frac{\sum_{n=1}^{N-k} x(n)x(n+k)}{\sum_{n=1}^N x^2(n)}, \quad (13)$$

tal que, neste caso, o maior valor de  $\rho_X(k)$  é 1, obtido para  $k = 0$ .

Uma escolha comum para  $\tau$  é o atraso (*lag*) para o qual a FAC atinge seu primeiro valor nulo. Por este método, as coordenadas de atraso passam a ser linearmente não-correlacionadas. Outra regra semelhante consiste em escolher o atraso de imersão como o *lag* no qual a FAC decai para  $1/e = 0,37$  [2]. [3] sugere outro método para a escolha do atraso de imersão mínimo, como sendo o *lag* seguinte ao ponto em que a FAC pára de diminuir; ou seja, no primeiro mínimo da FAC.

Uma objeção aos procedimentos mencionados anteriormente é que a estimação do atraso de imersão através da FAC é baseada em estatísticas lineares, não levando em conta correlações não-lineares [2]. [4] sugere uma escolha para  $\tau$  mais adequada ao problema de modelagem de sistemas dinâmicos, baseado em um critério de medida de independência mais geral, tal como como a informação ganha em bits sobre  $x(n+\tau)$  dada a medida de  $x(n)$ . Em suma, esta medida é conhecida como informação mútua e o primeiro mínimo no gráfico desta grandeza, em função de  $\tau$ , é freqüentemente sugerida como uma boa estimativa para  $\tau$  [1]. No presente artigo este é o critério adotado para determinar o atraso de imersão.

A expressão para o cálculo da informação mútua é baseada na entropia de Shannon. Dentro de um intervalo de dados de uma série temporal, é criado um histograma para a distribuição de probabilidade dos dados. Denota-se por  $p_i$  a probabilidade que o sinal assuma um valor dentro do  $i$ th caixa (*bin*) do histograma e assumi-se  $p_{ij}$  ser a probabilidade que  $x(n)$  esteja na caixa  $i$  e  $x(n+\tau)$  esteja na caixa  $j$ . Então a informação mútua para um atraso no tempo  $\tau$  é definido como,

$$I(\tau) = \sum_{i,j} p_{ij}(\tau) \ln p(i,j)(\tau) - 2 \sum_i p_i \ln p_i. \quad (14)$$

## 4 Exemplos de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares

Um dos mais simples e conhecidos mapas dinâmicos não-lineares que podem apresentar comportamento caótico é chamado de mapa logístico ou mapa quadrático, sendo descrito pela seguinte equação

$$x(n+1) = ax(n)[1-x(n)], \quad (15)$$

em que o parâmetro  $a > 0$  é uma constante a ser escolhida em função do comportamento desejado. Para  $1 \leq a \leq 4$ , a trajetória da variável de estado  $x$  produz valores restritos ao intervalo  $[0, 1]$  para condições iniciais no mesmo intervalo [1].

Para valores de  $a$  entre 0 e 3, na Equação (15), o estado assintótico de  $\{x(n)\}$  consiste em apenas um ponto de equilíbrio. Para  $3 < a < 3,57$ , a solução assintótica consiste de ciclos-limites de diferentes periodicidades. Para valores de  $3,57 < a \leq 4$ , o sistema passa a apresentar comportamento caótico [8]. Na Figura 1(a) é mostrada uma realização do mapa logístico para  $a = 4$ , em que pontos sucessivos são ligados por linhas retas para facilitar a visualização.

Apenas a visualização da série não é suficiente para caracterizá-la como estocástica ou caótica, fazendo-se necessária a utilização de medidas auxiliares. Uma métrica útil é a função de autocorrelação (FAC), que no caso de uma série estocástica, um ruído branco, é não-nula somente quando o distanciamento (atraso) entre as amplitudes é zero ( $k = 0$ ). Para a sequência gerada pelo mapa logístico, mostrada na Figura 1(b), é também não-nula somente quando o distanciamento entre as amplitudes é zero, de tal forma que a sequência produzida pode ser facilmente confundida com ruído branco. Esta característica permitiu que o mapa logístico fosse usado por muito tempo como um gerador de números aleatórios em computadores [1].

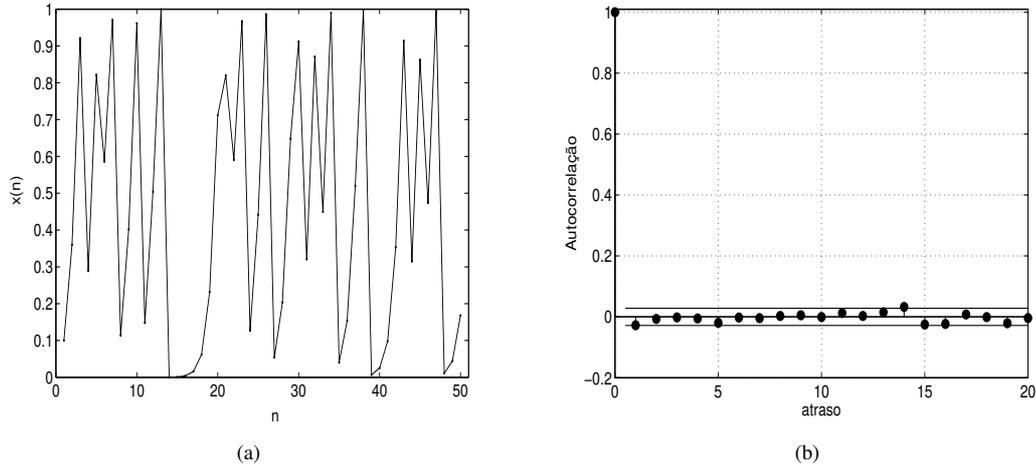


Figura 1: (a) mapa logístico para estado caótico; (b) autocorrelação para o mapa logístico com  $a = 4$ .

Como segundo exemplo de sistema caótico tem-se o mapa de Hénon

$$\begin{aligned} s_1(n+1) &= s_2(n) + 1 - as_1(n)^2, \\ s_2(n+1) &= bs_1(n). \end{aligned} \quad (16)$$

Com o valor de  $b = 0$ , este mapa se reduz ao sistema caótico apresentado anteriormente, o mapa logístico. Para comportamento caótico, este sistema possui uma pequena faixa de valores para  $a$  e  $b$ , sendo que os valores mais usuais para produzir um sistema caótico são  $a = 1,4$  e  $b = 0,3$  [2].

Na Figura 2(a) é mostrado o atrator original do mapa com os valores discutidos anteriormente. Na Figura 2(b) é reconstruído o atrator da medida  $s_1$ , usando uma dimensão de imersão  $d_E = 2$  e um atraso de imersão  $\tau = 2$ , resultando em coordenadas de atraso  $\mathbf{x}(n) = [x(n) \quad x(n+2)]^T$ . Observa-se aqui que existem intercessões na reconstrução do atrator e que desaparecem quando se aumenta o valor da dimensão de imersão para 3, Figura 2(c). Também é interessante demonstrar que para uma escolha de coordenadas tal como  $\mathbf{x}(n) = [x(n) \quad x(n+1)]^T$ , isto é,  $d_E = 2$  e  $\tau = 1$ , o atrator também é reconstruído sem intercessões, como mostrado na Figura 2(d).

A terceira série temporal caótica apresentada neste trabalho é oriunda da variável  $x(t)$  do sistema de equações de 15

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= a(y(t) - x(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= bx(t) - y(t) - x(t)z(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= y(t)x(t) - cz(t), \end{aligned} \quad (17)$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes reais. Este sistema de equações é considerado como o primeiro a revelar a presença de caos em sistemas dinâmicos dissipativos<sup>3</sup>. Para a série usada neste artigo utiliza-se  $a = 10$ ,  $b = 28$  e  $c = 8/3$ . A série temporal caótica de Lorenz é gerada a partir da discretização do sistema de equações (17), usando a equação de Euler (Seção 2). É adotado  $\Delta t = 0,01$  e as primeiras amostras geradas são descartadas por causa do efeito transitório. Na Figura 3, cuja forma lembra as asas de uma borboleta, observa-se a evolução das coordenadas  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  num gráfico tridimensional, mostrando a dinâmica do sistema para os parâmetros citados acima.

O sistema de equações (17) modela as variações temporais no gradiente de temperatura de um fluido, tal como a atmosfera, aquecido por baixo. A variável  $x$  está relacionada com a velocidade do fluxo de fluido em convecção. Se  $x > 0$ , o fluido circula no sentido horário, caso contrário, o fluido circula no sentido anti-horário. A variável  $y$  é proporcional à diferença de temperatura entre o fluido ascendente e o fluido descendente. A variável  $z$  é uma medida do grau de não-linearidade do gradiente de temperatura. Desde que o parâmetro  $c$ , chamado de *número de Rayleigh*, seja alto o suficiente, o sistema de Lorenz exibe caos e sensibilidade às condições iniciais. Assim, Lorenz concluiu que o “clima” é inerentemente imprevisível, a longo prazo.

Pela evolução temporal de apenas uma variável das equações de Lorenz, a variável  $x(t)$ , pode-se reconstruir a dinâmica do sistema através do Teorema da Imersão Takens. Pelos métodos de estimação das coordenadas de atraso discutidos na seção anterior, a Figura 4 mostra os valores 3 e 4 sugeridos como boas estimativas, respectivamente para o valor da dimensão de imersão e atraso de imersão da série de Lorenz. Sendo a dimensão do atrator de Lorenz  $d = 2,06$  [3], uma condição suficiente para o teorema de imersão ( $n_E \geq 2[d] + 1$ ) é adotar  $n_E = 5$ . Entretanto, tal como o valor encontrado pelo método de Cao, como

<sup>3</sup>Sistema no qual o volume se contrai com o passar do tempo, ao contrário de sistema conservativo, que durante sua evolução temporal, há preservação de volume no espaço de estados.

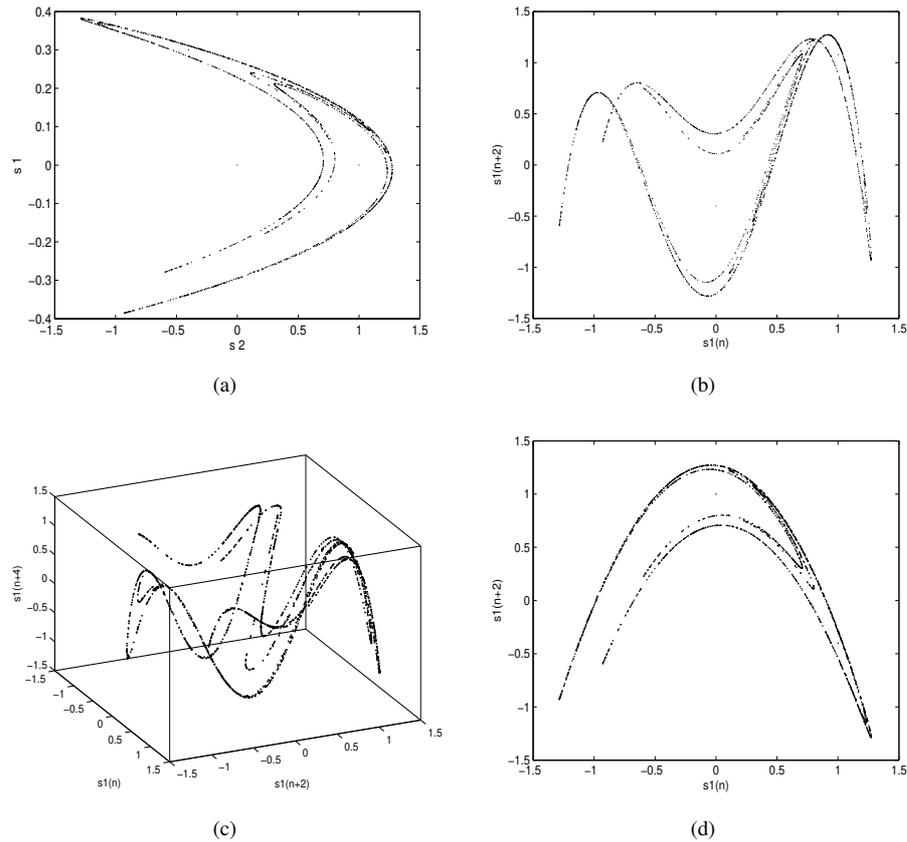


Figura 2: reconstrução do atrator de Hénon. (a) atrator original; (b) atrator reconstruído para  $\tau = 2$  e  $n_d = 2$ ; (c)  $\tau = 2$  e  $n_d = 3$ ; (d)  $\tau = 1$  e  $n_d = 2$ .

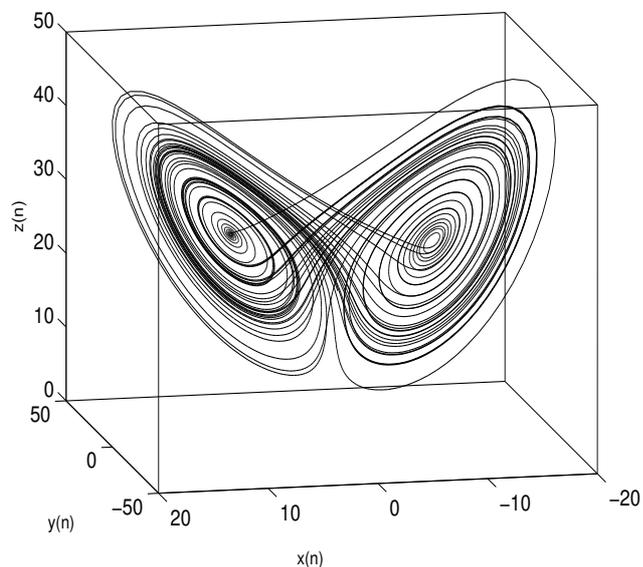


Figura 3: atrator de Lorenz.

também o valor de  $n_E = 3$  encontrado pelo método dos falsos vizinhos encontrado em 3, coincido com o número de variáveis do sistema são condições mínimas que recuperam também as invariâncias do sistema na sua reconstrução.

Os exemplos anteriores ilustram como séries geradas por sistemas dinâmicos caóticos podem ter características próprias de sinais estocásticos, apresentarem aperiodicidade e possuírem sensível dependência das condições iniciais. Assim, uma análise baseada apenas na FAC ou uma análise visual é incapaz de caracterizar uma série temporal caótica, sendo necessária algumas outras ferramentas que são descritas a seguir.

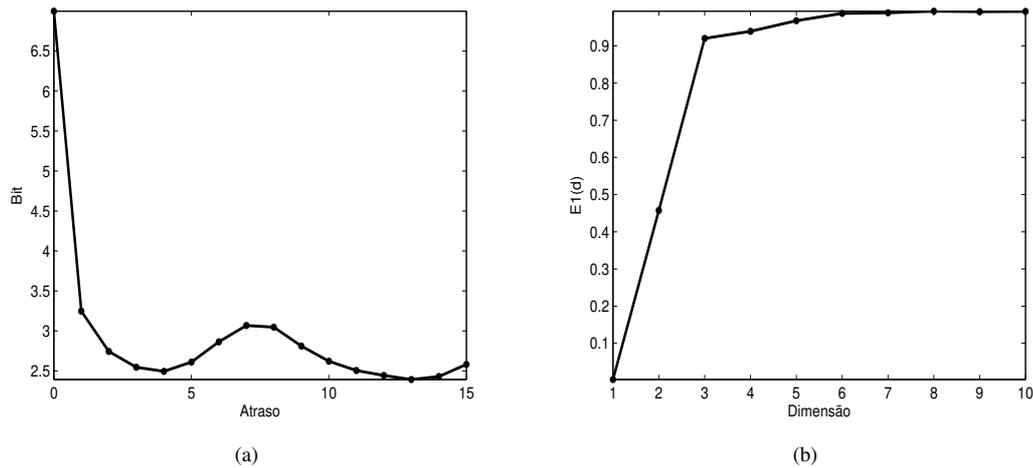


Figura 4: série de Caótica de Lorenz: (a) informação mútua para o cálculo do atraso de imersão; (b) método de CAO para o cálculo da dimensão de imersão.

## 5 Caracterização Elementar de Sistemas Caóticos

Sistemas caóticos são definidos qualitativamente como sistemas não-lineares, limitados em amplitude, possuidores de dinâmicas determinísticas que são aperiódicas e com uma alta dependência às condições iniciais. Nesta seção são apresentadas algumas técnicas de análise de séries temporais caóticas que permitem investigar cada uma destas características.

### 5.1 Limitado em Amplitude

Sistemas dinâmicos são ditos limitados (*bounded*) em amplitude se eles permanecem restritos a um volume finito do espaço de estados; ou seja, não se aproximam de  $\infty$  ou  $-\infty$  à medida que o tempo passa. Do ponto de vista prático, a definição de limitado como “permanecer em um volume finito” não é muito útil quando se tem um conjunto finito de dados, uma vez que qualquer medida de uma grandeza feita está sempre numa faixa finita, pois, a massa e energia do universo são finitos<sup>4</sup>. Assim, o conceito de limitado deve sempre estar associado aos valores máximos e mínimos aceitáveis para uma determinada aplicação.

### 5.2 Diagramas de Recorrência

Um sistema dinâmico é aperiódico quando um mesmo estado nunca é repetido. O comportamento caótico é inerentemente aperiódico. Esta porém é uma condição necessária, mas não suficiente. Lembre-se contudo que uma série estocástica também pode ser aperiódica, e que uma série temporal caótica pode se assemelhar a uma série periódica [8]. Isto posto, o método a seguir pode ser utilizado para avaliar o grau de periodicidade de uma série temporal.

Retomando a Equação (5), sejam dois pontos  $\mathbf{x}(i)$  e  $\mathbf{x}(j)$  no espaço de imersão  $d_E$ -dimensional, cada ponto representando o estado do sistema nos instantes  $i$  e  $j$ , respectivamente. Pode-se calcular a distância entre estes dois pontos por

$$\rho_{i,j} = \|\mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(j)\|, \quad (18)$$

em que  $\|\cdot\|$  denota a distância euclidiana entre os dois vetores.

Se a série temporal for periódica com período  $T$ , então  $\rho_{i,j} = 0$  quando  $|i - j| = nT$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Por outro lado, para séries temporais aperiódicas,  $\rho_{i,j}$  não mostra o mesmo padrão. Seja  $r$  um valor de referência ou limiar para a distância, tal que se desejava anotar quando a seguinte condição é verificada  $\|\mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(j)\| < r$ . Pode-se fazer isto construindo um gráfico, no qual  $i$  é o eixo das abscissas horizontal e  $j$  é o eixo das ordenadas, em que um ponto é marcado na coordenada  $(i, j)$  quando  $\|\mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(j)\| < r$ . Este gráfico é conhecido como Diagrama de Recorrência (*recurrence plot*) porque ele descreve como uma trajetória reconstruída tende a se repetir [8].

Na Figura 5 tem-se os diagramas de recorrência para três séries temporais, sendo que duas são geradas a partir do mapa logístico para diferentes valores do parâmetro  $a$  e a outra é uma sequência de ruído branco aleatório. A partir das séries são gerados coordenadas de atrasos de dimensão  $d_E = 2$ , segundo a Equação (5).

Para uma série periódica, o diagrama de recorrência mostrado na Figura 5a, formado pelo mapa logístico com  $a=3,52$ ,  $d_E=2$  e  $r=0,01$ , tem listras orientadas num ângulo de  $45^\circ$  e distanciadas entre si de 4 unidades de tempo, tanto ao longo do eixo vertical quanto no eixo horizontal. Já para a série temporal caótica, formada pelo mapa logístico com  $a=4$ ,  $d_E=2$  e  $r=0,03$ , o diagrama de recorrência mostrado na Figura 5b tem um estrutura mais complicada, algumas vezes com rastros de trajetórias com periodicidade e outras vezes não. E por último, para diagramas gerados para séries estocásticas aleatórias, no caso da Figura 5c, formado pelo ruído branco aleatório com  $d_E=2$  e  $r=0,3$ , os padrões encontrados nos dois casos anteriores não são verificados.

<sup>4</sup>Infinito é um conceito matemático e não um conceito físico [8].

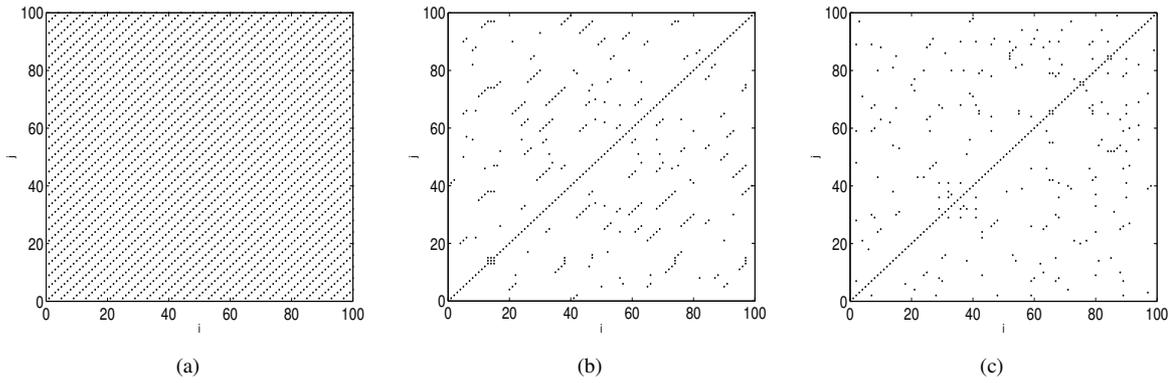


Figura 5: diagramas de recorrência: (a) mapa logístico, série periódica; (b) mapa logístico, série caótica; (c) ruído branco aleatório.

### 5.3 Determinismo em Séries Temporais

Grosso modo, sistemas dinâmicos são ditos determinísticos quando nenhum termo aleatório governa a dinâmica do sistema e sua evolução temporal pode ser determinada com acurácia. Pode-se determinar se o sistema (ou série temporal) é determinístico construindo-se um modelo da dinâmica e verificando se as predições feitas a partir deste modelo são precisas. Se as predições são exatas, então o sistema é completamente determinístico. Mesmo que as predições não sejam exatas, mas aproximadas, pode-se dizer que o sistema possui um componente determinístico. Se as predições são ruins, então o sistema não é determinístico [8].

Pode-se construir um modelo dinâmico de inúmeras formas. No momento, não se está interessado em detalhar estes modelos, mas apenas apresentar a ideia de determinismo, bastando para isto explicitar algumas maneiras de quantificar a qualidade de uma predição. Suponha que um certo modelo matemático implementa a função  $\hat{g}(\cdot)$  mostrada na Equação (6). Esta função, por sua vez, permite gerar estimativas de valores futuros  $\hat{x}(n+1)$  da série temporal. Uma vez tendo-se feito várias predições, o primeiro passo é calcular o erro médio de predição (*Mean Prediction Error*, MPE), que equivale ao conhecido erro quadrático médio (*Mean Square Error*, MSE)

$$\varepsilon^2 = \frac{\sum_{n=1}^T (x(n) - \hat{x}(n))^2}{T}, \quad (19)$$

em que  $T$  é o comprimento da sequência de amostras preditas. Valores elevados para  $\varepsilon$  significam que as predições são ruins e o modelo pode não ser determinístico<sup>5</sup>. Da mesma forma, valores pequenos de  $\varepsilon$  sugerem que o sistema é determinístico.

O valor de  $\varepsilon$ , na Equação (19), é um número absoluto, ou seja, por si só não diz se o erro está alto ou baixo. Para decidir o quanto um erro de predição é elevado ou não, deve-se compará-lo com algum valor de referência. Isto é necessário para que modelos distintos possam ser comparados entre si. Para este fim, uma forma bastante utilizada para avaliar a precisão de um modelo é por meio do MSE Normalizado (*Normalized MSE*, NMSE), dado pela seguinte expressão

$$\varepsilon_N^2 = \frac{\varepsilon^2}{\sigma_x^2}, \quad (20)$$

em que  $\sigma_x^2$  é a variância amostral da série temporal usada para criar o modelo  $\hat{g}(\cdot)$ , ou seja,

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{n=1}^N (x(n) - \bar{x})^2}{N}, \quad (21)$$

em que  $N$  é o comprimento da série temporal e  $\bar{x}$  é a média amostral desta série.

Comparando as Equações (19) e (21) percebe-se que a diferença entre elas está somente no segundo termo da diferença. Na expressão do MSE, este termo é  $\hat{x}(n)$ , enquanto na expressão da variância é  $\bar{x}$ . Desta forma, pode-se entender a variância como equivalente ao MSE calculado para o caso em que o modelo gera predições sempre iguais à média amostral. A lógica deste estimador é a seguinte: na dúvida ou na impossibilidade de gerar uma predição mais exata de uma grandeza, adota-se seu valor médio. Esta estratégia é usada, por exemplo, pelas companhias de energia elétrica ou água quando o funcionário que faz a leitura do equipamento medidor não consegue fazê-lo por algum motivo. Na conta de luz/água correspondente àquele mês de leitura não-feita, vem o valor médio dos últimos 12 meses.

Conclui-se então que ao dividir MSE pela variância da série observada, se está na verdade comparando o erro de predição de um dado modelo mais confiável com o erro de predição gerado pelo preditor mais trivial. Quando a predição é considerada boa, tem-se  $\varepsilon_N^2$  próximo de zero. Predições ruins geram valores de  $\varepsilon_N^2$  próximos de 1, o que significa que o modelo  $\hat{g}(\cdot)$  é tão ruim quanto o modelo que gera predições pelo valor médio.

<sup>5</sup>Assume-se aqui que o modelo que gera as predições está correto!

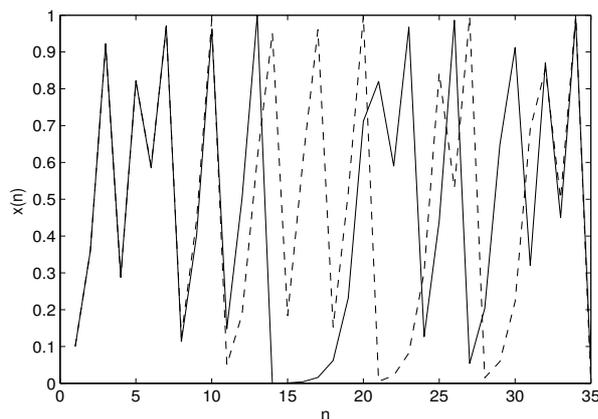


Figura 6: séries temporais geradas a partir do mapa logístico para duas condições iniciais diferentes, linha cheia,  $x(0) = 0,1$  e linha pontilhada,  $x(0) = 0,1001$ .

#### 5.4 Sensibilidade às Condições Iniciais

A ideia de sensibilidade às condições iniciais foi primeiramente estudada por Lorenz, ao elaborar o problema da imprevisibilidade atmosférica. Muito provavelmente, as equações completas, que descrevem com maior precisão a circulação atmosférica, apresentam uma sensibilidade às condições iniciais, o que torna efetivamente impossível qualquer previsão do tempo a longo prazo. O menor erro nas medidas das condições iniciais climáticas, num dado instante, pode comprometer a validade de qualquer previsão do tempo para os instantes seguintes. A dependência sensível das equações da circulação atmosférica é conhecida como efeito borboleta. Segundo Lorenz, pequenas perturbações causadas pelo bater de asas de uma borboleta no Brasil pode provocar o surgimento de um tornado no Texas<sup>6</sup> [6].

Desta forma, sensibilidade às condições iniciais é uma característica essencial de sistemas caóticos, que significa que dois pontos de um atrator que estão inicialmente próximos se distanciam com o decorrer do tempo. Esta idéia está ilustrada na Figura 6, em que um mesmo sistema dinâmico caótico é simulado a partir de duas condições iniciais bem próximas. É importante lembrar que, na prática, uma condição inicial nunca é exatamente igual a outra, visto que erros de medição ou aproximação causados por arredondamento sempre ocorrem quando se usa o computador digital para analisar sistemas caóticos.

Não se deve confundir sensibilidade às condições iniciais com instabilidade, pois as duas séries caóticas mostradas na Figura 6 são geradas pelo mesmo sistema dinâmico e, conseqüentemente, são portadoras de informação sobre o mesmo.

Em sistemas dinâmicos determinísticos lineares, uma pequena diferença nas condições iniciais não altera significativamente o curso da série temporal, de modo que as séries resultantes são bem parecidas. Por exemplo, considere um sistema definido pela equação  $x(t) = ax(t-1) + 1$ , em que  $0 < a < 1$ . Para  $a = 0,5$ , duas seqüências geradas a partir de  $x(0) = 0,1$  e  $x(0) = 0,1001$  são praticamente indistinguíveis pelo tempo que durar a simulação.

Vale a pena contrastar a propriedade da sensibilidade às condições iniciais com a propriedade do determinismo e avaliar suas implicações para o problema de predição de séries temporais caóticas. Foi definido anteriormente que um sistema determinístico é aquele que permite ser predito com exatidão. Contudo, a sensibilidade às condições iniciais de um sistema caótico revela que, embora tal sistema seja determinístico, as trajetórias por eles geradas seguirão cursos históricos diferentes a partir de um certo instante.

Analisando a Figura 6 com mais detalhe e observando a propriedade da sensibilidade às condições iniciais com a propriedade do determinismo, nota-se que até o instante de tempo  $n = 11$ , as séries temporais são praticamente as mesmas. Deste instante em diante, as trajetórias seguem rumos diferentes. Este exemplo ilustra bem a implicação da atuação destas duas propriedades de sistemas caóticos para o problema de séries temporais, que pode ser colocada da seguinte forma: é possível prever valores da série temporal para horizontes curtos de tempo, mas para horizontes maiores ou mais longos, a predição exata é impossível, uma vez que não se tem certeza da exatidão dos valores das condições iniciais de qualquer sistema real.

É importante destacar que mesmo predições para horizontes longos de tempo são úteis, pois se o modelo  $\hat{g}(\cdot)$  for considerado bom, as predições  $\hat{x}(n+1)$  geradas correspondem a uma série temporal pertencente ao sistema dinâmico subjacente e, desta forma, podem ser usadas para reconstruir o espaço de estados. Predições em horizontes pequenos de tempo são chamadas de predições de curto-prazo, enquanto que predições em horizontes mais longos são chamadas de predições de médio ou longo-prazo. Um tipo especial de predição de longo prazo é chamado de predição recursiva ou predição de horizonte infinito. Neste tipo de predição, o modelo  $\hat{g}(\cdot)$  é usado como um sistema autônomo, ou seja, ele é realimentado com suas próprias predições anteriores para horizontes longos de tempo.

Um modo de caracterizar a dinâmica de um sistema dinâmico caótico é medir o grau de sensibilidade às condições iniciais, sendo que isto é principalmente feito através do cálculo dos expoentes de Lyapunov do sistema dinâmico [8]. O conceito de

<sup>6</sup>Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas?.

Título de um seminário apresentado por Lorenz, em 1972.

expoentes de Lyapunov já existia bem antes do estabelecimento da moderna teoria de caos e foi desenvolvido para caracterizar a estabilidade de sistemas lineares assim como não-lineares.

Expoentes de Lyapunov, cuja quantidade é igual à dimensão do espaço de estados, são definidos como a média da razão exponencial em que se diverge no tempo trajetórias vizinhas. O conjunto de expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico é chamado de *espectro* deste sistema. Ele resume o nível médio de convergência ou divergência de duas trajetórias vizinhas no espaço de estados, assumindo valores negativos, positivos ou nulos.

Valores negativos significam que duas trajetórias encontram-se próximas uma da outra, tendendo a convergir. Expoentes de Lyapunov positivos, por outro lado, resultam em divergência de trajetórias e aparecem somente em sistemas caóticos. Portanto, um expoente positivo de Lyapunov é um dos mais importantes indicadores de dinâmica caótica. Um expoente positivo de Lyapunov quantifica a sensibilidade às condições iniciais do sistema dinâmico subjacente, por mostrar como pontos no espaço de fase inicialmente próximos separam-se com o passar do tempo [13].

A maior dificuldade na análise de séries temporais caóticas é que o espaço de estados é desconhecido, sendo que o espectro é calculado em algum espaço de imersão, que é o espaço de estados reconstruído de acordo com o Teorema de Takens. Assim, o número de expoentes depende da ordem  $d_E$  da reconstrução, e pode ser maior do que no espaço de estados original. A menos que a dimensão do espaço seja baixa e que os dados obtidos sejam de elevada qualidade (baixo nível de ruído), não se deve calcular todo o espectro. É interessante tentar computar primeiramente o maior expoente de Lyapunov. Este pode ser determinado até mesmo sem a construção explícita de um modelo para a série temporal [2].

Pode-se também calcular todo o espectro de Lyapunov, porém requer consideravelmente mais esforço computacional do que apenas o cálculo do maior expoente. Dentre as principais implementações de métodos que calculam o maior expoente de Lyapunov, duas se destacam, 2 e 16. Elas diferem somente na definição das trajetórias vizinhas. O algoritmo de 17 é outra implementação bastante conhecida e tem sido amplamente usado, mas devido a sua instabilidade e a impossibilidade de diferenciar a divergência exponencial da divergência devido ao ruído, não é muito recomendado.

Na próxima seção, tenta-se estabelecer uma relação com sistemas caóticos e geometria fractal. Em especial, está-se interessado em uma propriedade de geometria fractal conhecida com auto-similaridade, cuja manifestação tem sido verificada em diversos sistemas físicos, tais como tráfego em redes de comunicações.

## 6 Caos e Fractais

Na seção anterior, discutiu-se a propriedade dinâmica de sistemas caóticos que se manifesta na sensível dependência da evolução deste sistema às suas condições iniciais. Este estranho comportamento no tempo de um sistema caótico determinístico é refletido na geometria do conjunto de pontos que formam as trajetórias do sistema no espaço de estados, ou seja, em seu atrator. Atratores de sistemas caóticos têm geralmente uma geometria muito complicada, o que levou pesquisadores a chamá-los de *atratores estranhos* [2].

É bom lembrar que existem semelhanças e diferenças entre atratores estranhos e atratores convencionais encontrados em sistemas dinâmicos lineares, tais como pontos de equilíbrio e ciclos-limites. Assim, como os atratores lineares estáveis, trajetórias que começam longe do atrator são atraídas para ele. Contudo, uma vez que tais trajetórias estejam no atrator, elas não se repetem como nos ciclos-limites estáveis, e sim divergem uma das outras, permanecendo porém ainda dentro do atrator.

A estrutura geométrica do atrator estranho desenhada no espaço de estados tem dimensão fracionária, ou seja, não é um número inteiro como nos objetos geométricos clássicos [6]. Daí a razão do termo geometria fractal, usado para designar a geometria dos atratores estranhos. Costuma-se dizer que um certo atrator estranho é um objeto fractal, ou simplesmente fractal. O conceito de fractal pode ser introduzido como uma generalização da noção familiar de dimensão. Assim como um ponto, uma linha, um quadrado e um cubo podem ser ditos ter dimensões de 0, 1, 2, e 3 respectivamente, objetos fractais têm dimensões não-inteiras (fracionárias).

Pode-se estudar sistemas caóticos sem conexão direta e até de forma independente da geometria fractal, porém muitos sistemas físicos reais exibem propriedades típicas de fractais, tal como auto-similaridade, evidenciando que a geometria fractal fornece uma base natural para descrever fenômenos irregulares. Estudos recentes revelam, por exemplo, que tráfego de pacotes em redes de comunicações possuem características que podem ser descritas mais eficientemente em termos de processos fractais, em vez de processos estocásticos convencionais [18, 19].

Em particular, a auto-similaridade é uma propriedade típica de processos fractais. Um objeto, processo ou fenômeno é auto-similar quando se mantém certas características em diferentes escalas de tempo ou espaço. Cada escala lembra outras escalas, embora elas sejam diferentes. Esta propriedade tem sido observada em dados de tráfego de rede, em que para diversas escalas de tempo, pode-se verificar que o tráfego parece ser o mesmo. Modelos não-lineares, tais como redes neurais artificiais, que sejam capazes de modelar a dinâmica auto-similar, podem ser úteis na predição de tráfego em redes de comunicações.

## 7 Conclusão

Este trabalho dedicou-se à definição formal de sistemas dinâmicos não-lineares, realçando as semelhanças e diferenças principais entre séries temporais caóticas e estocásticas lineares. As principais técnicas e métodos de caracterização de sistemas caóticos foram descritos. Estes métodos, de forma geral, funcionam como testes para se conhecer se certo sistema é caótico ou possui irregularidades provocada apenas por elementos aleatórios. Também há a necessidade de se medir o quanto uma série é aperiódica, o grau de determinismo e o quanto certos sistemas são sensíveis às condições iniciais.

Desta forma, a caracterização do caos, juntamente com a estimação dos parâmetros de imersão para reconstrução de um sistema são pré-requisitos e ferramentas importantes para a predição e modelagem de séries temporais. Neste contexto, torna-se importante analisar sistemas dinâmicos sem que se conheça detalhes sobre a sua dinâmica, não possuindo portanto um modelo matemático estabelecido. Uma alternativa para isto é a análise de séries temporais que podem ser obtidas diretamente a partir de um experimento, como por exemplo dados extraídos pela medição do número de pacotes por um determinado período de tempo em uma rede de computadores, com o objetivo de modelar e prever o tráfego de pacotes na rede.

## REFERÊNCIAS

- [1] D. Kugiumtzis, B. Lillekjendlie and N. Christophersen. “Chaotic time series - Part I: Estimation of some invariant properties in state space”. *Modeling, Identification and Control*, vol. 15, no. 4, pp. 205–224, 1994.
- [2] H. Kantz and T. Schreiber. *Nonlinear time series analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [3] H. D. I. Abarbanel, R. Brown, J. J. Sidorowich and L. Tsimring. “The analysis of observed chaotic data in physical systems”. *Reviews of Modern Physics*, vol. 65, no. 4, pp. 1331–1392, 1993.
- [4] B. Lillekjendlie, D. Kugiumtzis and N. Christophersen. “Chaotic time series - Part II: System identification and prediction”. *Modeling, Identification and Control*, vol. 15, no. 4, pp. 225–243, 1994.
- [5] T. Schreiber. “Interdisciplinary application of nonlinear time series methods”. *Physics Reports*, vol. 308, no. 1, pp. 1–64, 1999.
- [6] L. H. A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. Livraria da Física, São Paulo, SP, second edition, 2006.
- [7] L. Glass and M. C. Mackey. *Dos Relógios ao Caos*. Edusp, São Paulo, SP, 1997.
- [8] D. Kaplan and L. Glass. *Understanding Nonlinear Dynamics*. Springer, New York, 1995.
- [9] M. A. Savi. *Dinâmica Não Linear e Caos*. Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, Engenharia Mecânica, 2004.
- [10] F. Takens. “Detecting strange attractors in turbulence”. In *Dynamical Systems and Turbulence*, edited by D. A. Rand and L.-S. Young, volume 898 of *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 366–381. Springer, 1981.
- [11] H. Whitney. “Differentiable manifolds”. *Annals of Mathematics*, vol. 37, no. 3, pp. 645–680, 1936.
- [12] L. Cao. “Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series”. *Physica D*, vol. 110, no. 1–2, pp. 43–50, 1997.
- [13] G. P. Williams. *Chaos Theory Tamed*. National Academies Press, Washington, DC, 1997.
- [14] A. M. Fraser and H. L. Swinney. “Independent coordinates for strange attractors from mutual information”. *Physical Review A*, vol. 33, pp. 1134–40, 1986.
- [15] E. Lorenz. “Deterministic nonperiodic flow”. *Science*, vol. 20, pp. 130–141, 1963.
- [16] M. T. Rosenstein, J. J. Collins and C. J. D. Luca. “A practical method for calculating the largest lyapunov exponents from small data sets”. *Physica D*, vol. 65, pp. 117–134, 1993.
- [17] A. J. Wolf, J. Swift, H. Swinney and J. Vastano. “Determining Lyapunov Exponents from a Time Series”. *Physica D*, vol. 16, pp. 285–317, 1985.
- [18] A. Erramilli, M. Roughan, D. Veitch and W. Willinger. “Self-Similar Traffic and Network Dynamics”. *Proceedings of the IEEE*, vol. 90, no. 5, pp. 800–819, 2002.
- [19] W. E. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger and D. V. Wilson. “On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic”. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 2, no. 1, pp. 1–15, 1994.