

MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS NEBULOSAS IMPLICATIVAS BASEADAS EM NORMAS TRIANGULARES ARQUIMEDIANAS

Marcos Eduardo Valle¹ e Peter Sussner²

¹Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática

Brasil, Londrina, PR 86051-990. E-mail: mevalle@gmail.com

²Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Matemática Aplicada

Brasil, Campinas, SP 13083-859. E-mail: sussner@ime.unicamp.br

Resumo - Memórias Associativas (AMs) são projetadas para armazenar associações e recordar uma saída desejada mesmo após a apresentação de uma versão incompleta ou distorcida de um padrão de entrada. Em particular, uma *Memória Associativa Nebulosa Implicativa* (IFAM) é uma AM nebulosa que aplica um produto max- \mathbf{T} , onde \mathbf{T} é uma norma triangular contínua, na fase de recordação. Esse artigo discute modelos de IFAMs que empregam normas triangulares Arquimedianas. Especificamente, é apresentado um teorema que caracteriza completamente os padrões recordados em termos de combinações de máximos e mínimos de versões transformadas dos padrões originais.

Palavras-chave: Memórias Associativas, Teoria dos Conjuntos Nebulosos, Normas Triangulares Arquimedianas.

1. Introdução

Em termos gerais, uma *Memória Associativa* (AM) é um modelo inspirado no cérebro humano e projetado para armazenar pares de entrada e saída. Além disso, uma AM deve ser capaz de recordar uma saída desejada mesmo após a apresentação de uma versão incompleta ou distorcida de um padrão de entrada [7, 11, 15, 25, 27]. Resumidamente, as pesquisas em memória associativa iniciaram na metade do século XX e receberam mais atenção nos anos 1980 após a publicação do famoso artigo de Hopfield [2, 11]. Nos anos 1990, foram apresentados vários modelos que estendem a rede de Hopfield, por exemplo, a *Memória Associativa de Capacidade Exponencial* (ECAM) [4] e a *Memória Associativa Bidirecional* (BAM) [17]. Entretanto, tanto a rede de Hopfield como a ECAM e a BAM, são modelos usados para armazenar padrões binários. Em contraste com os modelos binários, os modelos de memórias associativas baseados na morfologia matemática e na teoria dos conjuntos nebulosos podem ser usados para armazenar padrões em tons de cinza [25, 26, 27, 28, 29, 33].

As *Memórias Associativas Nebulosas* (FAMs) são modelos de memória associativa descritos por redes neurais nebulosas que armazenam padrões nebulosos, i.e., padrões cujos elementos pertencem ao intervalo [0,1]. A memória associativa nebulosa de Kosko, referida simplesmente por FAM de Kosko, representa o modelo mais conhecido de FAM [18]. A FAM de Kosko foi aplicada com sucesso em problemas de controle e rastreamento de alvos [16, 18]. Variações e extensões da FAM de Kosko incluem os modelos de Junbo et al. [12], Chung e Lee [5] e Liu [19]. Em particular, Valle e Sussner introduziram novos modelos de FAMs, chamados *Memórias Associativas Nebulosas Implicativas* (IFAMs), que generalizam ou estendem os modelos mencionados anteriormente [27, 29, 31, 33]. As IFAMs apresentam propriedades interessantes no caso auto-associativo como convergência numa única iteração e capacidade de armazenamento ilimitada, i.e., pode-se armazenar quando padrões forem desejados nesses modelos. Além disso, as IFAMs apresentaram bons resultados em problemas de previsão de séries temporais [27, 28, 29]. Recentemente, Sussner e Valle observaram que as principais FAMs, incluindo as IFAMs, efetuam operações elementares da morfologia matemática e podem ser classificadas como *Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas* (FMAMs) [31, 32].

Os primeiros modelos de AM baseados na morfologia matemática foram introduzidos por Ritter e Sussner e são referidos simplesmente como *Memórias Associativas Morfológicas* (MAMs) [24, 25]. Esses modelos efetuam operações elementares da morfologia matemática em cada neurônio [10, 28, 29, 31]. Resultados recentes que caracterizam completamente a fase de recordação das MAMs foram apresentados independentemente por Sussner e Valle [26, 28] e Ritter e Gader [23]. Em poucas palavras, foi demonstrado que os padrões recordados por essas AMs representam combinações de máximos e mínimos dos padrões originais com valores adicionados de uma constante. A caracterização da fase de recordação das MAMs colaborou para o desenvolvimento de aplicações desses modelos em problemas de reconstrução de imagens, classificação de padrões e previsão de séries temporais [26, 28].

Esse artigo apresenta um resultado que caracteriza completamente a fase de recordação da classe das IFAMs Arquimedianas, i.e., a classe das IFAMs baseadas em normas triangulares Arquimedianas. O artigo está organizado em 5 seções. A seção 2 apresenta os conceitos básicos da teoria dos conjuntos nebulosos, incluindo o conceito de norma triangular

Arquimediana e R-implicação. Uma breve revisão das IFAMs e do armazenamento nebuloso R-implicativo é apresentada na seção 3. A seção 4 introduz o teorema que caracteriza completamente a fase de recordação das IFAMs Arquimediana. O artigo termina com a conclusão na seção 5 e um apêndice contendo a demonstração do teorema 1.

2. Conceitos Básicos da Teoria dos Conjuntos Nebulosos

A teoria dos conjuntos nebulosos foi introduzida por Lotfi Zadeh como uma ferramenta para modelar a imprecisão e a ambigüidade que surge em sistemas complexos [21, 22]. Um conjunto nebuloso é definido como uma função \mathbf{x} de um conjunto \mathcal{U} , chamado universo de discurso, para o intervalo $[0, 1]$. A função \mathbf{x} é referida como *função de pertinência* e o valor $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ representa o *grau de pertinência* do elemento \mathbf{u} no conjunto nebuloso \mathbf{x} . Nesse artigo serão empregados apenas conjuntos nebulosos \mathbf{x} e \mathbf{y} definidos sobre universos de discurso finitos $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_m\}$, respectivamente. Nesse caso, \mathbf{x} e \mathbf{y} podem ser representados por vetores nos hipercubos $[0, 1]^n$ e $[0, 1]^m$, onde $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(u_j)$, para $j = 1, \dots, n$, e $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(v_i)$, para $i = 1, \dots, m$.

Muitas operações entre conjuntos nebulosos estão baseadas nos conceitos de norma triangular (t-norma) e implicação nebulosa [21, 22]. Esses conceitos formam a base para as IFAMs e o armazenamento nebuloso R-implicativo apresentados na próxima seção.

Definição 1 (Norma Triangular). Uma *norma triangular*, ou simplesmente *t-norma*, é um operador $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ crescente, comutativo e associativo que satisfaz $T(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in [0, 1]$. Em particular, uma t-norma T_f é Arquimediana se e somente se T_f é contínua em ambos os argumentos e $T_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in (0, 1)$.

A definição 1 introduz a classe mais geral de t-normas e a sub-classe das t-normas Arquimediana. Nesse artigo serão consideradas apenas t-normas Arquimediana. Entretanto, é importante observar que um operador $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma t-norma contínua se e somente se T é uma soma ordinal de t-normas Arquimediana [13]. Esse fato pode ser usado para estender os resultados apresentados nesse artigo para o caso mais geral.

A seguinte proposição revela que uma t-norma Arquimediana está associada à uma função contínua de uma única variável [21]. Essa proposição constitui a base para os resultados desenvolvidos na seção 4.

Proposição 1. Uma t-norma T_f é Arquimediana se e somente se existe $\mathbf{a} \in [0, 1]$ e um isomorfismo de ordem¹ $f : [0, 1] \rightarrow [\mathbf{a}, 1]$ tal que

$$(1) \quad T_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f^{-1}([f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})] \vee \mathbf{a}),$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0, 1]$. A função f em (1) é chamada *função geradora da t-norma T_f* .

Notação 1. Esse artigo segue a notação algébrica adotada freqüentemente em livros textos e artigos científicos sobre lógica nebulosa [6, 21] e teoria dos reticulados [3]. Aqui, os símbolos “ \vee ” e “ \wedge ” representam as operações de supremo (ou máximo) e ínfimo (ou mínimo), respectivamente. Em particular, $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \max(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \min(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

O produto, denotado por T_P , é um exemplo de t-norma Arquimediana com função geradora $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. O operador dado pela equação $T_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \vee (\mathbf{x} + \mathbf{y} - 1)$ é referido como t-norma de Lukasiewicz. Note que T_L é uma t-norma Arquimediana com função geradora $f(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{x}-1}$. Observe também que a constante “ \mathbf{a} ” em (1) satisfaz $\mathbf{a} = f(\mathbf{0})$. Portanto, $\mathbf{a} = 1$ para a t-norma T_P e $\mathbf{a} = e^{-1}$ para a t-norma de Lukasiewicz T_L .

Uma t-norma contínua T pode ser usada para definir uma implicação nebulosa como segue [6, 21]:

Definição 2 (R-implicação). Seja $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma t-norma contínua. A *R-implicação associada à t-norma T* é o operador $I : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dado pela seguinte equação para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0, 1]$:

¹ Lembre-se que um *isomorfismo de ordem* é uma bijeção tal que se e somente se .

$$(2) \quad I(x, y) = \bigvee \{z \in [0, 1] : T(x, z) \leq y\}.$$

É importante observar que existe na literatura outras formas de definir uma implicação nebulosa [21, 22]. Entretanto, a fase de armazenamento das IFAMs está baseada em R-implicações. Precisamente, a proposição 3 que caracteriza o armazenamento nebuloso R-implicativo só vale para implicações dadas pela equação (2).

Em particular, uma R-implicação associada à uma t-norma Arquimediana pode ser obtida facilmente usando a função geradora da t-norma. Especificamente, vale a seguinte proposição [21].

Proposição 2. Seja T_f uma t-norma Arquimediana e f sua função geradora. A R-implicação associada à T_f , denotada por I_f , é dada pela seguinte equação para todo $x, y \in [0, 1]$.

$$(3) \quad I_f(x, y) = f^{-1} \left(\left[\frac{f(y)}{f(x)} \right] \wedge 1 \right).$$

Pode-se verificar que as implicações dadas pelas equações (4) e (5) abaixo representam as R-implicações associadas ao produto e a t-norma de Lukasiewicz, respectivamente.

$$(4) \quad I_P(x, y) = 1 \wedge \left(\frac{y}{x} \right),$$

$$(5) \quad I_L(x, y) = 1 \wedge (y - x + 1).$$

Finalmente, t-normas e R-implicações podem ser combinadas com as operações de máximo e mínimo para formar produtos matriciais. Considere matrizes $A \in [0, 1]^{m \times k}$ e $B \in [0, 1]^{k \times n}$. O produto $\max-T$ e o produto $\min-I$ de A por B , denotados respectivamente por $C = A \circ B$ e $D = A \otimes B$, são definidos através das seguintes equações para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, respectivamente:

$$(6) \quad c_{ij} = \bigvee_{l=1}^k T(a_{il}, b_{lj}) \quad \text{e} \quad d_{ij} = \bigwedge_{l=1}^k I(b_{lj}, a_{il}).$$

Note que o produto $\max-T$ é efetuado de um modo muito similar ao produto clássico da álgebra linear, mas com o máximo no lugar da soma e uma t-norma T substituindo o produto. O produto $\min-I$ também é similar ao produto clássico. Aqui o mínimo substitui a soma e uma R-implicação aparece no lugar do produto. Entretanto, no produto $\min-I$, os termos a_{il} e b_{lj} aparecem em posições diferentes das usuais. Esse fato não pode ser esquecido pois uma R-implicação não é uma operação comutativa, i.e., em geral $I(a, b) \neq I(b, a)$ para $a, b \in [0, 1]$.

Normas triangulares particulares definem produtos $\max-T$ específicos. Dado um produto $\max-T$, indica-se a t-norma empregada em (6) por meio de um sub-índice. Uma notação semelhante é empregada para descrever o produto $\min-I$. Em particular, os símbolos “ \circ_f ” e “ \otimes_f ” denotam produtos $\max-T_f$ e $\min-I_f$, onde T_f é uma t-norma Arquimediana e I_f representa a R-implicação dada pela equação (3).

3. Introdução às Memórias Associativas Nebulosas Implicativas

Uma *Memória Associativa* (AM) é um modelo projetado para armazenar pares de entrada e saída. Além disso, uma AM deve possuir uma certa tolerância com respeito à ruído, i.e., ela deve ser capaz de recordar uma saída desejada mesmo após a apresentação de uma versão incompleta ou distorcida de um padrão de entrada [7, 8, 15]. Matematicamente, dado um conjunto de associações $\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$, chamado *conjunto das memórias fundamentais*, uma AM representa uma aplicação G tal que $G(x^\xi) = y^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, k$. A tolerância com respeito à ruído é descrita pela equação $G(\tilde{x}^\xi) = y^\xi$, onde \tilde{x}^ξ representa uma versão corrompida ou incompleta de x^ξ [7, 8].

Nas IFAMs, a aplicação G é dada por uma rede neural nebulosa de camada única com neurônios $\max-T$, onde T é uma t-norma contínua [27, 29, 31, 32, 33]. Dado um padrão de entrada $x \in [0, 1]^n$, uma matriz dos pesos

sinápticos $W \in [0, 1]^{m \times n}$ e um vetor bias $\theta \in [0, 1]^m$, a saída ou padrão recordado pela IFAM é determinado pela equação

$$(7) \quad y = (W \circ x) \vee \theta.$$

Note que uma IFAM é descrita simplesmente por um produto matriz-vetor seguido de um corte (threshold) de nível θ . Nesse sentido, esses modelos são similares às *Memórias Associativas Lineares* (LAMs) introduzidas independentemente por Anderson, Kohonen e Nakano [1, 14, 15, 20]. A diferença fundamental entre as LAMs e as IFAMs está na não linearidade das últimas devido às operações da teoria dos conjuntos nebulosos.

A matriz dos pesos sinápticos W e o vetor bias θ de uma IFAM são calculados através do *armazenamento nebuloso R-implicativo* [27, 29, 30]. Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$, defina $X = [x^1, \dots, x^k] \in [0, 1]^{n \times k}$ e $Y = [y^1, \dots, y^k] \in [0, 1]^{m \times k}$. No armazenamento nebuloso R-implicativo, W e θ são calculados através das equações

$$(8) \quad W = Y \circledast X^T \quad \text{e} \quad \theta = \bigwedge_{\xi=1}^k y^\xi,$$

onde o símbolo " \circledast " representa o produto \min - I baseado na R-implicação associada à t-norma contínua empregada no produto \max - T em (7). Note que a matriz W em (8) é calculada de um modo similar ao aprendizado por correlação [9]. A diferença está no produto \min - I definido na seção anterior.

A matriz dos pesos sinápticos W e o vetor bias θ fornecidos pelo armazenamento nebuloso R-implicativo satisfazem a seguinte proposição [29].

Proposição 3. Considere um conjunto $\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ de pares de entrada e saída. A matriz de pesos sinápticos W e o vetor bias θ fornecidos pelo armazenamento nebuloso R-implicativo são tais que $[W, \theta]$ representa o supremo do conjunto

$$(9) \quad [A, \beta] : (A \circ x^\xi) \vee \beta \leq y^\xi, \quad \forall \xi = 1, \dots, k,$$

onde $[W, \theta]$ (resp. $[A, \beta]$) é a matriz $m \times (n+1)$ obtida concatenando $W \in [0, 1]^{m \times n}$ e $\theta \in [0, 1]^m$ (resp. A e β).

A proposição 3 pode ser interpretada como uma condição de otimalidade do armazenamento nebuloso R-implicativo no seguinte sentido: Se existe uma matriz A e um vetor β tais que $(A \circ x^\xi) \vee \beta = y^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, k$, então W e θ fornecidos por (8) também satisfazem $(W \circ x^\xi) \vee \theta = y^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, k$. Além disso, valem as seguintes inequações $A \leq W$ e $\beta \leq \theta$.

O seguinte exemplo apresenta as fases de armazenamento e recordação da IFAM de Lukasiewicz. O mesmo exemplo será considerado na próxima seção para validar o teorema que caracteriza o padrão recordado por uma IFAM Arquimediana. É importante observar que a IFAM de Lukasiewicz está intimamente relacionada com as *memórias associativas morfológicas* introduzidas por Sussner e Ritter [24, 25]. Sobretudo, esse modelo de IFAM apresentou bons resultados em problemas de previsão de séries temporais [27, 28, 29].

Exemplo 1. Considere padrões x^1, x^2 e y^1, y^2 correspondendo às colunas das matrizes $X \in [0, 1]^{3 \times 2}$ e $Y \in [0, 1]^{5 \times 2}$ dadas pelas seguintes equações:

$$(10) \quad X = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.9 \\ 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.8 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

A matriz dos pesos sinápticos $W \in [0, 1]^{5 \times 3}$ e o vetor bias $\theta \in [0, 1]^5$ fornecidos pelo armazenamento nebuloso R-implicativo baseado na implicação de Lukasiewicz são dados pelas seguintes equações, respectivamente:

$$(11) \quad W = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.6 \\ 0.9 & 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.9 & 0.9 \\ 0.3 & 0.6 & 0.9 \\ 0.5 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix} \quad e \quad \theta = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}.$$

Dado o padrão de entrada

$$(12) \quad \mathbf{x} = [0.6 \quad 0.2 \quad 0.7]^T,$$

o padrão $\mathbf{y} = (W \circ_L \mathbf{x}) \vee \theta$ recordado pela IFAM de Lukasiewicz é

$$(13) \quad \mathbf{y} = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0.6 \quad 0.7]^T.$$

Note que \mathbf{y} não corresponde à nenhum dos padrões originais. O teorema 1 apresentado na próxima seção esclarece, entre outras coisas, a relação entre a saída \mathbf{y} e os padrões originais \mathbf{y}^1 e \mathbf{y}^2 .

4. Caracterização da Fase de Recordação das IFAMs Arquimedianas

O seguinte teorema caracteriza completamente a fase de recordação das IFAMs baseadas em t-normas Arquimedianas. A demonstração desse resultado encontra-se no apêndice.

Teorema 1. Seja T_f uma t-norma Arquimediana com função geradora $f : [0, 1] \rightarrow [a, 1]$. Considere um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ e defina $W \in [0, 1]^{m \times n}$ e $\theta \in [0, 1]^m$ através do armazenamento nebuloso R-implicativo. Dado um padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$, o padrão $\mathbf{y} \in [0, 1]^m$ recordado pela IFAM Arquimediana satisfaz a equação

$$(14) \quad \mathbf{y} = \left\{ \bigvee_{j=1}^n \left[\left(\bigwedge_{\xi=1}^k \tilde{T}_f(\alpha_j^\xi, \mathbf{y}^\xi) \right) \wedge x_j \right] \right\} \vee \theta.$$

onde $\tilde{T}_f : [0, 1/a] \times [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$ é o operador dado pela seguinte equação para todo $i = 1, \dots, m$:

$$(15) \quad [\tilde{T}_f(\alpha, \mathbf{z})]_i = f^{-1} \left(\left\{ [\alpha f(z_i)] \wedge 1 \right\} \vee a \right).$$

O coeficiente α_j^ξ em (14) é dado por

$$(16) \quad \alpha_j^\xi = \frac{f(x_j)}{f(x_j^\xi)},$$

para todo $j = 1, \dots, n$ e $\xi = 1, \dots, k$.

Observação 1. O padrão \mathbf{y} em (14) também pode ser expresso em termos da seguinte equação:

$$(17) \quad \mathbf{y} = \left[\bigvee_{j=1}^n \bigwedge_{\xi=1}^k (\tilde{T}_f(\alpha_j^\xi, \mathbf{y}^\xi) \wedge x_j) \right] \vee \theta.$$

Logo, o padrão recordado por uma IFAM Arquimediana é formado por combinações de máximos e mínimos de transformações $\tilde{T}_f(\alpha_j^\xi, \mathbf{y}^\xi) \wedge x_j$ das memórias fundamentais.

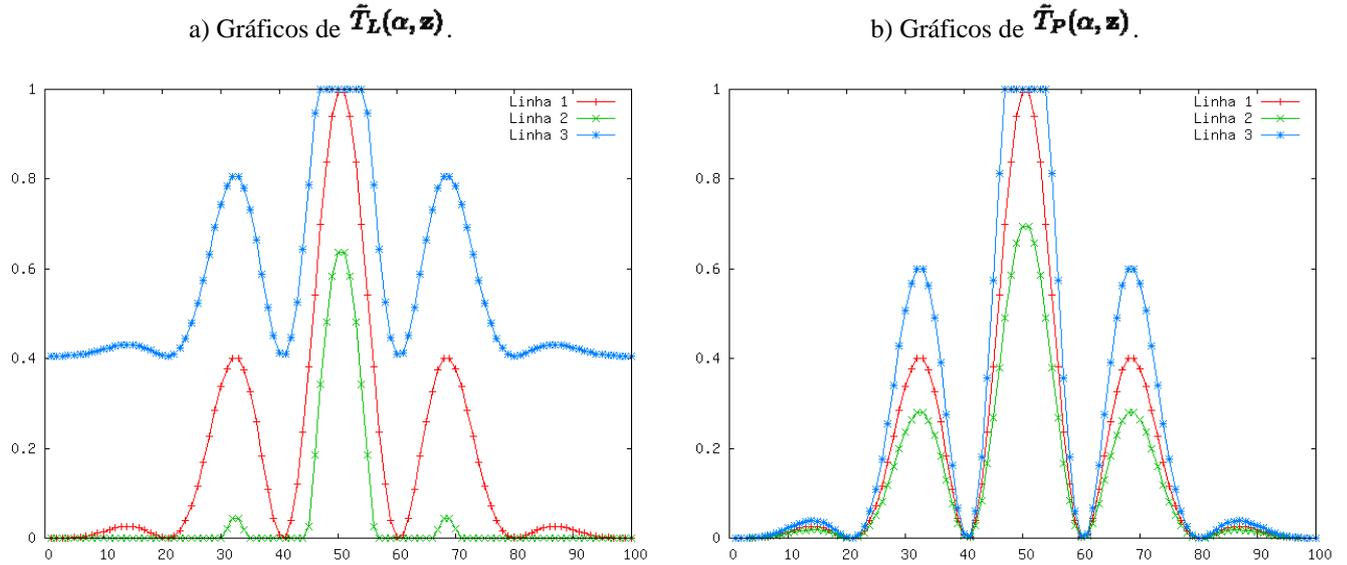


Figura 1. A linha vermelha marcada com o símbolo “+” (Linha 1) corresponde ao padrão original $\mathbf{z} \in [0, 1]^{100}$. A linha verde com “x” (Linha 2) corresponde ao padrão $\tilde{T}_L(0.7, \mathbf{z})$ em a) e $\tilde{T}_P(0.7, \mathbf{z})$ em b). Finalmente, a linha azul com “*” (Linha 3) representa $\tilde{T}_L(1.5, \mathbf{z})$ em a) e $\tilde{T}_P(1.5, \mathbf{z})$ em b).

Observação 2. Se $\mathbf{a} = 0$, então o operador \tilde{T} é definido no domínio $\mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0} \times [0, 1]^m$, onde $\mathbb{R}_{+\infty}^{\geq 0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : \mathbf{x} \geq 0\} \cup \{+\infty\}$.

Observação 3. O operador \tilde{T}_f estende a t-norma T_f para $[0, 1/a] \times [0, 1]^m$ (lembre-se que $\mathbf{a} \in [0, 1]$) no seguinte sentido:

1. Se $0 \leq \alpha \leq 1$ então existe $\mathbf{c} \in [0, 1]$ tal que $f(\mathbf{c}) = \alpha$. Portanto, tem-se

$$[\tilde{T}_f(\alpha, \mathbf{z})]_i = f^{-1}\left(\left\{[f(\mathbf{c})f(\mathbf{z}_i)] \wedge 1\right\} \vee \mathbf{a}\right) = f^{-1}\left([f(\mathbf{c})f(\mathbf{z}_i)] \vee \mathbf{a}\right) = T_f(\mathbf{c}, \mathbf{z}_i).$$

Em outras palavras, cada componente de $\tilde{T}_f(\alpha, \mathbf{z})$ é equivalente à aplicação da t-norma T_f em \mathbf{c} e \mathbf{z}_i .

2. Se $1 < \alpha \leq 1/a$, então $\alpha f(\mathbf{z}_i) \geq f(\mathbf{z}_i)$ para todo $i = 1, \dots, m$. Usando a monotonicidade dos operadores \vee , \wedge e da função f^{-1} , conclui-se que

$$[\tilde{T}_f(\alpha, \mathbf{z})]_i = f^{-1}\left(\left\{[\alpha f(\mathbf{z}_i)] \wedge 1\right\} \vee \mathbf{a}\right) \geq f^{-1}\left(f(\mathbf{z}_i) \vee \mathbf{a}\right) = \mathbf{z}_i,$$

para todo $i = 1, \dots, m$. Em outras palavras, $\tilde{T}_f(\alpha, \mathbf{z}) \geq \mathbf{z}$ se $\alpha \geq 1$.

Em ambos os casos, o padrão $\tilde{T}_f(\alpha, \mathbf{z})$ preserva a “forma” do padrão \mathbf{z} . Essa afirmação torna-se mais clara observando na figura 1 os gráficos de $\tilde{T}_L(\alpha_i, \mathbf{z})$ e $\tilde{T}_P(\alpha_i, \mathbf{z})$ para $i = 1, 2$, onde $\alpha_1 = 0.7$ e $\alpha_2 = 1.5$. Note que as inequações $\tilde{T}_f(0.7, \mathbf{z}) \leq \mathbf{z} \leq \tilde{T}_f(1.5, \mathbf{z})$ foram satisfeitas.

O seguinte exemplo apresenta o operador \tilde{T}_L que estende a t-norma de Lukasiewicz. Lembre-se que a função geradora da t-norma de Lukasiewicz é $f(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{x}-1}$. Logo, $\mathbf{a} = f(0) = e^{-1}$ e $f^{-1}(\mathbf{y}) = \log(\mathbf{y}) + 1$, para todo $\mathbf{y} \in [\mathbf{a}, 1]$.

Exemplo 2. Considere $\alpha \in [0, 1/a]$ e $\mathbf{z} \in [0, 1]^m$. Para facilitar a exposição, defina $\mathbf{c} = \log(\mathbf{x} \vee \mathbf{a}) + 1$. Pode-se verificar que o operador \tilde{T}_L dado pela equação (15) satisfaz as seguintes igualdades para todo $i = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \left[\tilde{T}_L(\alpha, \mathbf{z}) \right]_i &= \log \left(\left\{ [\alpha e^{z_i-1}] \wedge 1 \right\} \vee a \right) + 1 = \log \left(\left\{ [e^{c+z_i-2}] \wedge e^0 \right\} \vee e^{-1} \right) + 1 \\ &= \log \left(\left\{ e^{(c+z_i-2) \wedge 0} \right\} \vee e^{-1} \right) + 1 = \log \left(e^{[(c+z_i-2) \wedge 0] \vee (-1)} \right) + 1 = \left([(c+z_i-2) \wedge 0] \vee (-1) \right) + 1 \\ (18) \quad &= [(c+z_i-1) \wedge 1] \vee 0. \end{aligned}$$

Logo, $\left[\tilde{T}_L(\alpha, \mathbf{z}) \right]_i = [(c+z_i-1) \wedge 1] \vee 0$ para todo $i = 1, \dots, m$. Em outras palavras, a transformação $\tilde{T}_L(\alpha, \mathbf{z})$ representa a translação vertical² de \mathbf{z} restrita ao interior do hipercubo³ $[0, 1]^m$.

Note que, se $0 \leq \alpha \leq 1$, então $0 \leq c \leq 1$. Nesse caso, tem-se $c+z_i-1 \leq 1$ para todor $z_i \in [0, 1]$ e

$$(19) \quad \left[\tilde{T}_L(\alpha, \mathbf{z}) \right]_i = (c+z_i-1) \vee 0 = T_L(c, z_i).$$

Portanto, \tilde{T}_L pode ser visto como uma extensão da t-norma de Lukasiewicz.

Observação 4. O coeficiente α_j^ξ em (14) pode ser interpretado como uma medida do quanto x_j é maior, menor ou igual à x_j^ξ . Por exemplo, $\alpha_j^\xi = 1$ se e somente se $x_j = x_j^\xi$. Além disso, α_j^ξ afeta diretamente o padrão recordado \mathbf{y} pois valem os seguintes fatos:

1. Se $x_j < x_j^\xi$ então $\tilde{T}(\alpha_j^\xi, y^\xi) < y^\xi$,
2. Se $x_j = x_j^\xi$ então $\tilde{T}(\alpha_j^\xi, y^\xi) = y^\xi$,
3. Se $x_j > x_j^\xi$ então $\tilde{T}(\alpha_j^\xi, y^\xi) > y^\xi$.

Exemplo 3. Na IFAM de Lukasiewicz, os coeficientes α_j^ξ são determinados pela seguinte equação:

$$(20) \quad \alpha_j^\xi = (e^{x_j-1}) / (e^{x_j^\xi-1}) = e^{x_j-x_j^\xi}.$$

Exemplo 4. Nesse exemplo, a equação (14) que caracteriza a fase de recordação de uma IFAM Arquimediana será aplicada para obter o padrão recordado pela IFAM de Lukasiewicz do exemplo 1. Para tanto, considere $\mathbf{X} = [x^1, x^2]$ e $\mathbf{Y} = [y^1, y^2]$ fornecidos em (10) e o padrão de entrada \mathbf{x} dado em (12).

Primeiramente, devem ser calculados os coeficientes $\alpha_j^\xi \in [0, 1/a]$ para $j = 1, 2, 3$ e $\xi = 1, 2$. Aplicando a equação (16), ou (20), obtem-se: $\alpha_1^1 = 1.34986$, $\alpha_2^1 = 0.81873$, $\alpha_3^1 = 1.10517$, $\alpha_1^2 = 0.81873$, $\alpha_2^2 = 0.74082$ e $\alpha_3^2 = 1.64872$.

O próximo passo consiste em calcular os padrões $\tilde{T}_L(\alpha_j^\xi, y^\xi)$ para $j = 1, 2, 3$ e $\xi = 1, 2$ através de (15) ou (18). As

2 A translação vertical é dada por . Na equação (18), a constante é .
 3 A restrição de no hipercubo é dada pelos cortes (thresholds) em nível e , i.e., .

equações (21) e (22) abaixo apresentam os padrões $\tilde{T}_L(\alpha_1^1, \mathbf{y}^1)$ e $\tilde{T}_L(\alpha_1^2, \mathbf{y}^2)$ como exemplo:

$$(21) \quad \tilde{T}_L(\alpha_1^1, \mathbf{y}^1) = [0.5 \ 0.5 \ 0.8 \ 1.0 \ 1.0]^T,$$

$$(22) \quad \tilde{T}_L(\alpha_1^2, \mathbf{y}^2) = [0.7 \ 0.6 \ 0.2 \ 0.0 \ 0.1]^T.$$

Note que $\alpha_1^2 \leq 1 \leq \alpha_1^1$, logo $\tilde{T}_L(\alpha_1^1, \mathbf{y}^1) \geq \mathbf{y}^1$ enquanto que $\tilde{T}_L(\alpha_1^2, \mathbf{y}^2) \leq \mathbf{y}^2$.

Defina agora vetores $\mathbf{u}_j = \tilde{T}_L(\alpha_j^1, \mathbf{y}^1) \wedge \tilde{T}_L(\alpha_j^2, \mathbf{y}^2)$ para $j = 1, 2, 3$. Nesse exemplo tem-se

$$(23) \quad \mathbf{u}_1 = [0.5 \ 0.5 \ 0.2 \ 0.0 \ 0.1]^T,$$

$$(24) \quad \mathbf{u}_2 = [0.0 \ 0.0 \ 0.1 \ 0.0 \ 0.0]^T,$$

$$(25) \quad \mathbf{u}_3 = [0.3 \ 0.3 \ 0.6 \ 0.6 \ 0.8]^T.$$

Observe que \mathbf{u}_j representa o termo entre os parênteses centrais da equação (14).

Finalmente, o padrão recordado pela IFAM é o máximo entre θ e os vetores $\mathbf{u}_j \wedge \mathbf{x}_j$, para $j = 1, 2, 3$. Em outras palavras, o padrão recordado $\mathbf{y} = (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{x}_1) \vee (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{x}_2) \vee (\mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{x}_3) \vee \theta$ satisfaz:

$$(26) \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.2 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.1 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ 0.7 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

Como era de se esperar, o resultado em (26) coincide com o padrão apresentado em (13).

5. Conclusão

A principal contribuição desse artigo encontra-se no teorema 1 que caracteriza completamente a fase de recordação das IFAMs Arquimedianas. Resumidamente, o padrão recordado por uma IFAM Arquimediana representa combinações de máximos e mínimos de transformações das memórias fundamentais. As transformações aplicadas podem ser interpretadas como operações que estendem a t-norma Arquimediana. Espera-se que o teorema 1 apresentado nesse artigo contribua diretamente para o desenvolvimento de novas aplicações das IFAMs.

6. Apêndice - Demonstração do Teorema 1

Primeiramente, a matriz dos pesos sinápticos $\mathbf{W} \in [0, 1]^{m \times n}$ fornecida pelo armazenamento nebuloso R-implicativo é tal que w_{ij} satisfaz as seguintes igualdades para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$:

$$(27) \quad w_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^k I_f(x_j^\xi, y_i^\xi) = \bigwedge_{\xi=1}^k f^{-1} \left(\left[\frac{f(y_i^\xi)}{f(x_j^\xi)} \right] \wedge 1 \right) = f^{-1} \left(\left[\bigwedge_{\xi=1}^k \left(\frac{f(y_i^\xi)}{f(x_j^\xi)} \right) \right] \wedge 1 \right).$$

Estas igualdades foram deduzidas usando a definição de \mathbf{W} e o fato de f ser um isomorfismo de ordem. Conseqüentemente, f^{-1} também é um isomorfismo de ordem e ambas f e f^{-1} são funções que comutam com as operações de máximo e mínimo.

Defina $\mathbf{z} = \mathbf{W} \circ_f \mathbf{x}$. Usando a definição do produto max-T, a proposição 1 e o fato de f e f^{-1} serem isomorfismos

de ordem, pode-se mostrar que as seguintes igualdades valem para todo $i = 1, \dots, m$.

$$\begin{aligned}
 z_i &= \bigvee_{j=1}^n T_f(w_{ij}, x_j) = \bigvee_{j=1}^n f^{-1}([f(w_{ij})f(x_j)] \vee a) = \bigvee_{j=1}^n f^{-1} \left(\left\{ \left[\bigwedge_{\xi=1}^k \left(\frac{f(y_i^\xi)}{f(x_j^\xi)} \right) \right] \wedge 1 \right\} f(x_j) \right) \vee a \\
 &= \bigvee_{j=1}^n f^{-1} \left(\left\{ \left[\bigwedge_{\xi=1}^k \left[\left(\frac{f(y_i^\xi)}{f(x_j^\xi)} \right) \wedge 1 \right] \right\} f(x_j) \right) \vee a = \bigvee_{j=1}^n f^{-1} \left(\left\{ \bigwedge_{\xi=1}^k \left[\left(\left(\frac{f(y_i^\xi)}{f(x_j^\xi)} \right) \wedge 1 \right) f(x_j) \right] \right\} \vee a \right) \\
 &= \bigvee_{j=1}^n f^{-1} \left(\left\{ \bigwedge_{\xi=1}^k \left[\left(\frac{f(y_i^\xi)}{f(x_j^\xi)} f(x_j) \right) \wedge f(x_j) \right] \right\} \vee a \right) = \bigvee_{j=1}^n f^{-1} \left(\bigwedge_{\xi=1}^k \left[\left\{ \left(\frac{f(y_i^\xi)}{f(x_j^\xi)} f(x_j) \right) \wedge f(x_j) \right\} \vee a \right] \right) \\
 &= \bigvee_{j=1}^n \bigwedge_{\xi=1}^k f^{-1} \left(\left[\left(\frac{f(y_i^\xi)}{f(x_j^\xi)} f(x_j) \right) \wedge f(x_j) \right] \vee a \right) = \bigvee_{j=1}^n \bigwedge_{\xi=1}^k f^{-1} \left(\left[\left(\frac{f(y_i^\xi)}{f(x_j^\xi)} f(x_j) \right) \vee a \right] \wedge f(x_j) \right) \\
 &= \bigvee_{j=1}^n \bigwedge_{\xi=1}^k f^{-1} \left(\left\{ \left[\left(\frac{f(y_i^\xi)}{f(x_j^\xi)} f(x_j) \right) \wedge 1 \right] \vee a \right\} \wedge f(x_j) \right) = \bigvee_{j=1}^n \bigwedge_{\xi=1}^k \left[f^{-1} \left(\left[\left(\frac{f(y_i^\xi)}{f(x_j^\xi)} f(x_j) \right) \wedge 1 \right] \vee a \right) \wedge f(x_j) \right]
 \end{aligned}$$

Finalmente, defina α_j^ξ e \bar{T}_j através das equações (16) e (15), respectivamente, e observe que o padrão recordado pela IFAM Arquimediana é simplesmente $\mathbf{y} = \mathbf{z} \wedge \theta$.

7. Agradecimentos

Este trabalho teve apoio da FAPESP e do CNPq, processos nos. 06/06818-1 e 306040/2006-9, respectivamente.

8. Referências Bibliográficas

- [1] J. Anderson. A simple neural network generating interactive memory. *Mathematical Biosciences*, 14:197–220, 1972.
- [2] J. A. Anderson and E. Rosenfeld, editors. *Neurocomputing: Foundations of Research*, volume 1. MIT Press, Cambridge, MA, 1989.
- [3] G. Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence, 3 edition, 1993.
- [4] T. Chiueh and R. Goodman. Recurrent correlation associative memories. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 2(2):275–284, Mar. 1991.
- [5] F. Chung and T. Lee. On fuzzy associative memory with multiple-rule storage capacity. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 4(3):375–384, 1996.
- [6] P. Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*, volume 4 of *Trends in Logic: Studia Logica Library*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
- [7] M. H. Hassoun, editor. *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [8] M. H. Hassoun. *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995.
- [9] S. Haykin. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [10] H. Heijmans. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.

- [11] J. J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79:2554–2558, Apr. 1982.
- [12] F. Junbo, J. Fan, and S. Yan. A learning rule for fuzzy associative memories. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, volume 7, pages 4273 – 4277, 1994.
- [13] E. P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. Triangular norms. position paper III: continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 145(3):439–454, August 2004.
- [14] T. Kohonen. Correlation matrix memory. *IEEE Trans. on Computers*, C-21:353–359, 1972.
- [15] T. Kohonen. *Self-Organization and Associative Memory*. Springer Verlag, 1984.
- [16] S.-G. Kong and B. Kosko. Adaptive fuzzy systems for backing up a truck-and-trailer. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 3(2):211–223, 1992.
- [17] B. Kosko. Bidirectional associative memories. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18:49–60, 1988.
- [18] B. Kosko. *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [19] P. Liu. The fuzzy associative memory of max-min fuzzy neural networks with threshold. *Fuzzy Sets and Systems*, 107:147–157, 1999.
- [20] K. Nakano. Associatron: A model of associative memory. *IEEE Trans. on Systems, Man, Cybernetics*, SMC-2:380–388, 1972.
- [21] H. T. Nguyen and E. A. Walker. *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2 edition, 2000.
- [22] W. Pedrycz and F. Gomide. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. Wiley-IEEE Press, New York, 2007.
- [23] G. X. Ritter and P. Gader. Fixed points of lattice transforms and lattice associative memories. In P. Hawkes, editor, *Advances in Imaging and Electron Physics*, volume 144. Academic Press, New York, NY, 2006.
- [24] G. X. Ritter and P. Sussner. An introduction to morphological neural networks. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, pages 709–717, Vienna, Austria, 1996.
- [25] G. X. Ritter, P. Sussner, and J. L. D. de Leon. Morphological associative memories. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 9(2):281–293, 1998.
- [26] P. Sussner and M. E. Valle. Grayscale morphological associative memories. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 17(3):559–570, May 2006.
- [27] P. Sussner and M. E. Valle. Implicative fuzzy associative memories. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 14(6):793–807, 2006.
- [28] P. Sussner and M. E. Valle. Morphological and certain fuzzy morphological associative memories for classification and prediction. In V. Kaburlasos and G. Ritter, editors, *Computational Intelligence Based on Lattice Theory*, ch. 8, pages 149–172. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2007.
- [29] M. E. Valle. *Fundamentos e Aplicações de Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, Brasil, Fevereiro 2007.
- [30] M. E. Valle and P. Sussner. IFAMs - memórias associativas baseadas no aprendizado nebuloso implicativo. In *Anais do VII Congresso Brasileiro de Redes Neurais*, Natal, October 2005.
- [31] M. E. Valle and P. Sussner. Fuzzy associative memories from the perspective of mathematical morphology. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2007)*, pages 829 – 834, London, United

Kingdom, July 2007.

[32] M. E. Valle and P. Sussner. A general framework for fuzzy morphological associative memories. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007. Accepted Manuscript.

[33] M. E. Valle, P. Sussner, and F. Gomide. Introduction to implicative fuzzy associative memories. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, pages 925 – 931, Budapest, Hungary, 2004.